Методические указания по Отраслевой олимпиаде школьников «Газпром», профиль математика.

Учебное пособие для подготовки к олимпиаде

Под редакцией Санкт-Петербургского горного университета

МАТЕМАТИКА

Очный тур олимпиады по математике проводится только в письменной форме. Типовые варианты дают представление об уровне требований, предъявляемых к участникам олимпиады.

Каждый участник олимпиады получает вариант, содержащий десять заданий.

Десять заданий варианта включают преобразование алгебраического выражения, решение показательного (или логарифмического), иррационального уравнения, алгебраического, тригонометрического, иррационального или показательно-логарифмического неравенства, задачи на производную и прогрессию, задачу по геометрии. В вариант также могут входить текстовые задачи на составление алгебраического уравнения или системы уравнений, задачи с параметром, тригонометрические неравенства.

Задания рассчитаны на выявление математической смекалки и эрудиции каждого участника олимпиады.

При решении следует учитывать, что в вариант включены задания разной сложности в порядке возрастания их номера. Соответственно, выполнение более сложного задания оценивается большим числом баллов.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные дроби и наоборот. В решениях также не требуется приводить пространных словесных пояснений, но следует выполнить все необходимые математические выкладки.

В целом уровень предлагаемых заданий не выходит за рамки программы средней общеобразовательной школы.

ПРИМЕРНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ (С РЕШЕНИЯМИ)

Вариант 1

1. Найти сумму первых 19 членов арифметической прогрессии, если $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$

2. Решить уравнение

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{x}\right)=(x-1)\cdot(x-2).$$

3. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x^3}{3}$.

4. Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

5. В треугольнике ABC точка M – середина медианы AK. Прямая BM пересекает сторону AC в точке L. Найти длину отрезка AL, если известно, что длина AC равна 9 см.

6. Решить уравнение $\log_3(x-2)=1-\log_3 x$.

7. . При каких значениях параметра a решения неравенства $2^{|x|+a}<1/2$ заполняют промежуток $(-3;3)$?

8. Упростить выражение

$$\sqrt{p^2-2pq+q^2}\cdot\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}-\left(\frac{q-p}{q}\right)^{-1}+\frac{q^{-1}}{p^{-1}+q^{-1}}\right).$$

9. Вычислить значение выражения $\cos 260°\cdot\sin 130°\cdot\cos 160°$.

10. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2-16x^2-\pi^2+8\pi x$.

Решения

1. Если $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – члены арифметической прогрессии, то $a_k=a_1+(k-1)d$, где d – разность прогрессии, и, следовательно,

$$a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=(a_1+3d)+(a_1+7d)+(a_1+11d)+(a_1+15d)=$$

$$=4a_1+36d=4(a_1+9).$$

По условию $4(a_1+9)=224$, то есть, $a_1+9d=224/4=56$.

$$S_{19}=\frac{2a_1+(19-1)d}{2}\cdot 19=(a_1+9d)\cdot 19=56\cdot 19=1064.$$

Ответ:1064.

2. Область определения данного уравнения $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Приведя к общему знаменателю выражения в левой части уравнения, получим:

$$\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2-4}{x}\right)=(x-1)\cdot(x-2),\text{ или}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x}=(x-1)\cdot(x-2),$$

откуда следует:

$$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=x^2\cdot(x-1)\cdot(x-2).$$

Очевидно, что корнями этого уравнения являются $x=1$, $x=2$. Сокращая обе части уравнения на $(x-1)\cdot(x-2)$, получим уравнение

$$(x+1)\cdot(x+2)=x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x+2=x^2 \;\Leftrightarrow\; 3x+2=0,$$

которое имеет корень $x=-2/3$.

Ответ: $x=1$, $x=2, x=-2/3$.

3. Найдем область определения функции (ООФ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^3}{3}$:

$$D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Вычислим $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3x^2}{3}=\dfrac{x^4-1}{x^2}$.

Найдем стационарные точки функции:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^4-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Исследуем производную на знак в области определения функции, результаты исследования представим в виде таблицы:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–		–	0	+
$f(x)$	↑	–4/3	↓		↓	4/3	↑

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, убывает на интервалах $(-1,0)$ и $(0,+1)$, $x=1$ – точка минимума, $x=-1$ – точка максимума, $f(-1)=-4/3$, $f(1)=4/3$.

4. Решим уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$. Решение иррациональных уравнений нужно начинать с определения ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-6\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[6;\infty).$$

Чтобы не нарушать эквивалентность преобразований при возведении в квадрат, надо перенести $\sqrt{x-6}$ в правую часть уравнения. Тогда

$$\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-6}\right)^2 \Leftrightarrow$$

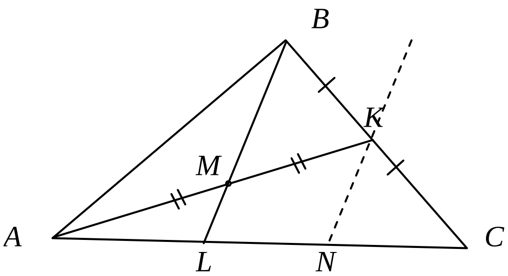
$$\Leftrightarrow x+2=4+4\sqrt{x-6}+x-6 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-6}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-6}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-6}\right)^2=1^2 \Leftrightarrow x-6=1 \Leftrightarrow x=7.$$

В иррациональных уравнениях проверку надо делать обязательно.

Проверка: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}=\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$; $2\equiv 2$.

Ответ: x = 7.



5. Проведем прямую $KN \parallel BL$ (рис.1). Так как $AM=MK$, то по теореме Фалеса, примененной к $\angle KAC$, $AL=LN$. Аналогично, для $\angle BCA$ и параллельных прямых KN и BL получим $LN=NC$. Таким образом,

$$AL=LN=NC=\frac{1}{3}AC=3.$$

Ответ: 9.

6. Решим уравнение $\log_3(x-2)=1-\log_3 x$. При решении логарифмических и показательных уравнений необходимо найти область допустимых значений (ОДЗ) и сделать проверку.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;\infty).$$

Тогда

$$\log_3(x-2)+\log_3 x=\log_3 3 \Rightarrow \log_3(x-2)x=\log_3 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1 x_2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3; \\ x_2=-1, \end{array}\right. \quad x_2=-1 \notin \text{ОДЗ}.$$

Проверка. Подставляем $x=3$ в левую и правую части уравнения по отдельности: $\log_3(3-2)=0;\ 1-\log_3 3=1-1=0;\ 0\equiv 0$.

Ответ: x = 3.

7. Преобразуем неравенство к виду $2^{|x|+a}<2^{-1}$. В силу строгого возрастания показательной функции с основанием $2>1$, полученное неравенство равносильно неравенству $|x|+a<-1$, или $|x|<-1-a$. Воспользовавшись правилами решения неравенств, содержащих модуль, получим $1+a<x<-1-a$. По условию $1+a=-3$ и $-1-a=3$, откуда $a=-4$.

Ответ: $a=-4$.

8. Чтобы упростить первый множитель, воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{p^2-2pq+q^2}=|p-q|.$$

Тогда

$$\sqrt{p^2-2pq+q^2}\cdot\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}-\left(\frac{q-p}{q}\right)^{-1}+\frac{q^{-1}}{p^{-1}+q^{-1}}\right)=$$

$$=|p-q|\cdot\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}+\frac{q}{p-q}+\frac{p}{p+q}\right)=$$

$$=|p-q|\frac{2pq+pq+q^2+p^2-pq}{p^2-q^2}=$$

$$=\frac{|p-q|(p+q)^2}{(p-q)(p+q)}=\frac{|p-q|(p+q)}{(p-q)}=(p+q)\operatorname{sgn}(p-q)=$$

$$=\left[\begin{array}{l} p+q,\ \ p>q; \\ -p-q,\ \ p<q. \end{array}\right.$$

Ответ: $p+q$ при $p>q$,

$-p-q$ при $p<q$.

9. Преобразуем данное выражение и воспользуемся формулами приведения:

$$\cos 260^\circ\cdot\sin 130^\circ\cdot\cos 160^\circ=$$

$$=\cos(270^\circ-10^\circ)\cdot\sin(180^\circ-50^\circ)\cdot\cos(180^\circ-20^\circ)=$$

$$=-\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot(-\cos 20^\circ)=(\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ)\cdot\cos 20^\circ=$$

(по формуле произведения синусов)

$$=\frac{1}{2}(\cos 40^\circ-\cos 60^\circ)\cos 20^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ=$$

$$=\frac{2\cos 40^\circ-1}{4}\cdot\cos 20^\circ=\frac{2\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ}{4}=$$

(по формуле произведения косинусов)

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ)-\cos 20^\circ}{4}=\frac{\cos 60^\circ}{4}=\frac{1}{8}$$

Ответ: 1/8.

10. ОДЗ уравнения $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2-16x^2-\pi^2+8\pi x$ определяется неравенствами $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x\neq\pi l,\ k,l\in Z$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^4 x-1+\cos^4 x+1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x-\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^4 x+1}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x(\sin^2 x-1)+\cos^2 x(\cos^2 x-1)+1}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 x+1}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-2\sin^2 x\cos^2 x+1}{\sin^2 x\cos^2 x}=-2+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=-2+\frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Очевидно, что наименьшее значение левой части уравнения равно 2 и достигается при $\sin^2 2x=1$, откуда

$$2x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z, \text{ и } x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Правая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен $2-16x^2-\pi^2+8\pi x=2-(16x^2-8\pi x+\pi^2)=2-(4x-\pi)^2$ и достигает наибольшего значения, равного 2, при $(4x-\pi)^2=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Сравнивая полученные результаты, видим, что равенство левой и правой частей уравнения возможно лишь при $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 2

1. С помощью арифметической прогрессии найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

2. Решить уравнение $2^{\frac{3}{\log_3 x}}=\dfrac{1}{64}$.

3. Касательная к параболе $y = x^2$ в точке x_0 составляет угол $60°$ с осью Ox. Найти x_0.

4. При каком значении параметра a длина отрезка, являющегося областью решений неравенства $x^2 - 4 \le a$, равна 6?

5. В треугольнике ABC угол ABC = 120°, AB = 6 см. Площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$ см 2. Найти BC.

6. Упростить выражение и вычислить его значение при $x = 8$:

$$\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)} \right) \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1}.$$

7. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 - x} > 1 + x$.

8. Решить уравнение

$$2|\sin x|\cos(2\pi - x) = \cos^2(7\pi/2 - x).$$

9. Определить количество решений уравнения $\sin 3x = x^3$.

10. Решить уравнение

$$x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x\log_{1/6}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x.$$

Решения

1. Всякое четное число, делящееся на 3, делится на 6; наименьшим трехзначным числом, обладающим этим свойством, является 102. Числа 102, 108, 114, … образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 6$. Общий член прогрессии задается формулой $a_n = 102 + (n-1)\cdot 6$, и, так как все члены искомой суммы – трехзначные числа, то

$$102 + (n-1)\cdot 6 \le 999,\ n \le 1 + \frac{999 - 102}{6} = 1 + \frac{897}{6} = 150.5.$$

Таким образом число слагаемых, составляющих искомую сумму, $n = 150$.

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 150 \cdot 102 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 150 = 82305\ .$$

Ответ: 82305.

2. Решим уравнение

$$2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}\ .$$

Определим ОДЗ: $\begin{cases} x > 0; \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1, \infty).$

Перепишем уравнение в виде $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}$. Так как показательная функция строго монотонна, данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{3}{\log_3 x} = -6 \Leftrightarrow \log_3 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

Ответ: $x = 1/\sqrt{3}$.

3. Тангенс угла наклона касательной к кривой $y = x^2$ при $x = x_0$ равен значению производной в этой точке, следовательно, $y'(x_0) = 2x_0 = tg60° = \sqrt{3}$, откуда $x_0 = \sqrt{3}/2$ и $y_0 = 3/4$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

4. Решим неравенство $x^2 \le a + 4$. ОДЗ: $a + 4 \ge 0 \Rightarrow a \ge -4$. Тогда можно извлечь корень: $|x| \le \sqrt{a+4} \Rightarrow -\sqrt{a+4} \le x \le \sqrt{a+4}$. Отсюда длина отрезка равна $2\sqrt{a+4}$. Следовательно, $2\sqrt{a+4} = \ = 6 \Rightarrow a + 4 = 9 \Rightarrow a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

5. Дано: ΔABC; ∠ABC = 120°; AB = 6 см; SΔABC = $6\sqrt{3}$ см2. Найти BC.

Воспользуемся формулой для площади треугольника:

$$S_{\Delta\, ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC=\frac{2S_{\Delta\, ABC}}{AB\sin\angle ABC}\Rightarrow BC=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{6\sin 120^{\circ}}=4\,\text{см.}$$

Ответ: BC = 4 см.

6. Упростим выражение, пользуясь формулами сокращенного умножения и свойствами степеней.

$$\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}(x-1)}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\right)\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}=\frac{2x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}=\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}-1}.$$

При $x=8$ значение выражения равно $\frac{1}{\left(8^{\frac{2}{3}}-1\right)}=\frac{1}{3}.$

Ответ: 1/3.

7. . Решение неравенства $\sqrt{x^2-x}>1+x$ начнем с нахождения области определения:

$$x^2-x\geq 0\Leftrightarrow x(x-1)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,0]\cup[1;\,+\infty)$$

(см. рис.2)

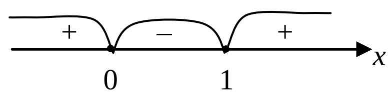


Рис. 2

Заметим, что значение арифметического квадратного корня $\sqrt{x^2 - x}$ всегда неотрицательно, следовательно, при отрицательной правой части решением неравенства будет любое x из ОДЗ:

$$\begin{cases} 1 + x < 0; \\ x \le 0 \;\; или \;\; x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1; \\ x \le 0 \;\; или \;\; x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

При неотрицательной правой части возведем обе части неравенства в квадрат:

$$\begin{cases} 1 + x \ge 0; \\ x^2 - x > (1 + x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \ge 0; \\ x^2 - x > x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \ge 0; \\ -1 > 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1; \\ x < -1/3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; -1/3).$$

Объединяя найденные результаты, получим $x \in (-\infty; -1/3)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1/3)$.

8. Решим уравнение $2|\sin x|\cos(2\pi - x) = \cos^2(7\pi/2 - x)$. Воспользуемся формулами приведения и тем, что $\sin^2 x = |\sin x|^2$:

$$2|\sin x|\cos x = \sin^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|\sin x|\cos x = |\sin x|^2 \Rightarrow |\sin x|(2\cos x - |\sin x|) = 0.$$

Получим $|\sin x| = 0 \Rightarrow x = \pi k$ или $2\cos x = |\sin x|$.

Отсюда при $\sin x \ge 0$ имеем $2\cos x = \sin x$, $\operatorname{tg} x = 2$, т.е. $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$.

С учетом условия $\sin x \ge 0$ получим $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$.

Аналогично при $\sin x < 0$ имеем $2\cos x = -\sin x$, $\operatorname{tg} x = -2$ и $x = -\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$ (с учетом условия $\sin x < 0$).

Ответ: $x = \pi k$, $x = \pm\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $k, n \in Z$.

9. Построим графики левой и правой частей уравнения $x^3 = \sin 3x$ (рис. 3).

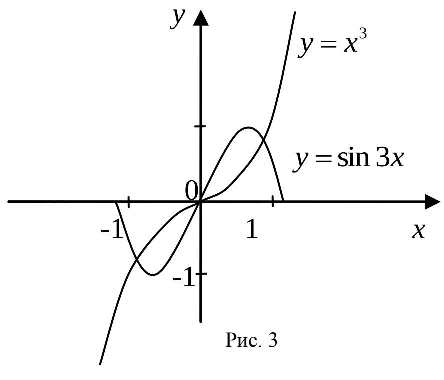


Рис. 3

Очевидно, что графики этих функций пересекаются в начале координат и еще в двух симметричных относительно 0 точках.

Так как функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а функция $y = \sin 3x$ ограничена и периодична (ее период $T = \frac{2\pi}{3}$), других точек пересечения графиков функций нет.

Ответ: 3.

10. $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{1/6}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$.

ОДЗ: $5x^2 - 2x - 3 > 0$. Корни уравнения $5x^2 - 2x - 3 = 0$ равны $x_1 = 1,\ x_2 = -3/5$. Отсюда ОДЗ: $(-\infty; -3/5) \cup (1; \infty)$.

Упростим левую часть уравнения, заменив основание 1/6 на 6, и избавимся от корня:

$$\frac{1}{2} x^2 \log_6 (5x^2 - 2x - 3) + x \log_6 (5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x.$$

Вынесем (x2 +2x) за скобки. Тогда $(x^2 + 2x)\left[\frac{1}{2}\log_6(5x^2 - 2x - 3) - 1\right] = 0$. Следовательно, корнями уравнения являются $x_1 = 0, x_2 = -2$ и $\log_6(5x^2 - 2x - 3) = 2 \Rightarrow 5x^2 - 2x - 39 = 0$ $\Rightarrow x_3 = 3, x_4 = -13/5$. Учитывая ОДЗ, получим $x_1 = -2,\quad x_2 = 3,\quad x_3 = -13/5$.

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -13/5$.

Вариант 3

1. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = \frac{x^2}{2}$ в точках с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_0 = 1$.

2. Три числа, третьим из которых является 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получим арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

3. Решить уравнение $\left(\sqrt[3]{0{,}5} + \sqrt[3]{4}\right)^x = \frac{27}{2}$.

4. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{a^2-b\sqrt{ab}}\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

5. Два бассейна наполняют водой. В одном из них уже имеется 200 м3 воды, а в другом – 112 м3. Через сколько часов количество воды в бассейнах станет одинаковым, если во второй бассейн в час вливается на 22 м3 воды больше, чем в первый?

6. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти катеты.

7. Решить уравнение $\sqrt{|x^2-3x+2|}=2x+1$.

8. Решить уравнение

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$$

9. Решить неравенство

$$\frac{4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1}{\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)^2}>0.$$

10. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$.

Решения

1. Уравнение касательной $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Найдем $f'(x)=\frac{2x}{2}$ и вычислим угловые коэффициенты касательных $k_1=f'(-1)=-1$, $k_2=f'(1)=1$. Поскольку $k_1\cdot k_2=-1$, касательные перпендикулярны.

Ответ: $90°$.

2. Воспользуемся свойствами прогрессий: если три числа (a, b, c) образуют геометрическую прогрессию, то $ac=b^2$; если три числа (a, b, c) образуют арифметическую прогрессию, то $a+c=2b$. Обозначим x и y – первые два числа. Тогда

$$\begin{cases} 12x = y^2 \\ x + 9 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 2y - 9 \Rightarrow (2y-9)12 = y^2 \Rightarrow y^2 - 24y + 108 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = 18,\ y_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 27,\ x_2 = 3.$$

Ответ: две геометрические прогрессии: 3, 6, 12 и 27, 18, 12; две арифметические: 3, 6, 9 и 27, 18, 9.

3. Областью определения уравнения является вся числовая ось. Преобразуем уравнение:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{2^2}\right)^x = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1+2}{\sqrt[3]{2}}\right)^x = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{27}{2}\right)^{x/3} = \frac{27}{2},$$

откуда $x = 3$.

Ответ: $x = 3$

4. Упростим выражение

$$\left[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}\left(\frac{1}{a^2 - b\sqrt{ab}}\right)^{-1}\right]^{-1} =$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}\sqrt{a}\left[\left(\sqrt{a}\right)^3 - \left(\sqrt{b}\right)^3\right]\right\}^{-1} =$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a}\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{a-b}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{a-b}$.

5. Пусть t – искомое число часов; x – число кубических метров воды, которая нальется в первый бассейн за время t. К этому моменту во втором бассейне должно быть (x + 88) м3 воды. Скорость заполнения первого бассейна равна $\dfrac{x}{t}$ м3/ч, а второго бассейна

$-\ \dfrac{x+88}{t}$ м3/ч. По условию задачи разность между скоростями составляет 22 м3/ч. Итак, $\dfrac{x+88}{t}-\dfrac{x}{t}=22 \Rightarrow x+88-x=22t$, откуда $t=4$ ч.

Ответ: 4 ч.

6. Дано: ΔABC – прямоугольный, CM – медиана, CM = $\sqrt{3}/2$ см, $\angle ACM : \angle MCB = 2:1$. Найти AC и CB.

Достроим заданный треугольник до прямоугольника CADB (рис.4). Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, поэтому $CD=2CM=\sqrt{3}$ см. По условию $\angle MCB=30^{\circ}$. В треугольнике CDB

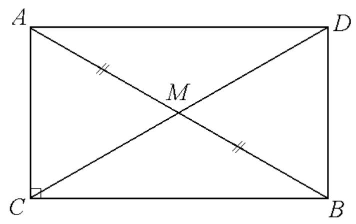


Рис.4

$DB=AC=CD\sin\angle MCB=$

$=\sqrt{3}\sin 30^{\circ}=\sqrt{3}/2$ см;

$CB=CD\cos\angle MCB=\sqrt{3}\cos 30^{\circ}=3/2$ см.

Ответ: $AC=\sqrt{3}/2$ см, $CB=3/2$ см.

7. Решим уравнение $\sqrt{|x^2-3x+2|}=2x+1$. Найдем ОДЗ: $2x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1/2$.

Теперь можно возвести обе части уравнения в квадрат: $|x^2-3x+2|=(2x+1)^2$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $x^2-3x+2\geq 0$ или $(x-2)(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[2;\infty)$, тогда $x^2-3x+2=4x^2+4x+1 \Rightarrow 3x^2+7x-1=0$ и $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{61}}{6}$. С учетом ОДЗ получим один корень $x=\dfrac{-7+\sqrt{61}}{6}$.

Случай 2. $x^2-3x+2<0 \Rightarrow x\in(1;2)$, тогда $-x^2+3x-2=4x^2+4x+1$ и данное уравнение корней не имеет.

Ответ: $x=\dfrac{-7+\sqrt{61}}{6}$.

8. В уравнении

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$$

положим $x=5/2+y$. Тогда заданное уравнение примет вид

$$3\left(\frac{1}{\frac{5}{2}+y}+\frac{1}{y-\frac{5}{2}}\right)+\left(\frac{1}{y+\frac{3}{2}}+\frac{1}{y-\frac{3}{2}}\right)+4\left(\frac{1}{y+\frac{1}{2}}+\frac{1}{y-\frac{1}{2}}\right)=0$$

или

$$2y\left[\frac{3}{y^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{1}{y^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{4}{y^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]=0.$$

Отсюда $y=0 \Leftrightarrow x=5/2$ или

$$3\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-\frac{25}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)+4\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{25}{4}\right)=0\,.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$8y^4-48y^2+\frac{119}{2}=0,$$

откуда

$$y^2=\frac{24\pm\sqrt{576-4\cdot 119}}{8}=\frac{24\pm 10}{8},\ \ y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{17}}{2},\ \ y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $x_1=\frac{5}{2}$; $\quad x_{2,3}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$; $\quad x_{4,5}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

9. Решим неравенство

$$\frac{4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1}{\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)^2}>0\,.$$

Найдем ОДЗ:

$$\frac{1}{2}-\cos x\neq 0\Rightarrow \cos x\neq \frac{1}{2}\Rightarrow x\neq \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\ ,\ k\in Z\ .$$

Поскольку знаменатель положителен, исходное неравенство сводится к неравенству вида $4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+1>0$.

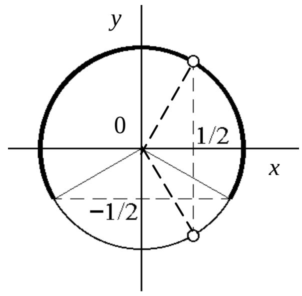


Рис.5

Воспользуемся формулой

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta).$$

Найдем

$$2(\sin x+\sin(-2\pi/3))+\sqrt{3}+1>0$$

или

$$2\sin x-2\sqrt{3}/2+\sqrt{3}+1>0\Rightarrow \sin x>-1/2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in(2\pi k-\pi/6;\,2\pi k+7\pi/6).$$

С учетом ОДЗ получим

$$x\in(2\pi k-\pi/6;\,2\pi k+\pi/3)\cup$$

$$\cup(2\pi k+\pi/3;\,2\pi k+7\pi/6),\ k\in Z\ \text{(рис.5).}$$

Ответ: $x\in(2\pi k-\pi/6;\,2\pi k+\pi/3)\cup(2\pi k+\pi/3;\quad 2\pi k+7\pi/6),\quad k\in Z$.

10. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\ \log_2\ \log_{x-1}9>0$. Найдем ОДЗ:

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}x-1>0\\ x-1\neq 1\\ \log_{x-1}9>0\\ \log_2\log_{x-1}9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0;\\ x\neq 2;\\ \log_{x-1}9>\log_{x-1}1;\\ \log_{x-1}9>1,\end{cases}$$

но так как неравенство $\log_{x-1}9>\log_{x-1}1$ может выполняться только при $x-1>1$, поэтому ОДЗ (рис.6)

$$\begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \\ x-1>1 \\ \log_{x-1} 9>\log_{x-1}(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \\ x>2 \\ x-1<9 \end{cases} \Rightarrow x\in(2,10).$$

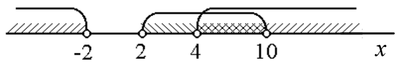


Рис.6

Исходное неравенство: $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9>\log_{\frac{1}{2}} 1$. Поскольку основание логарифма меньше единицы, при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный. Получим

$$\log_2 \log_{x-1} 9<1 \Leftrightarrow \log_2 \log_{x-1} 9<\log_2 2 \Leftrightarrow \log_{x-1} 9<2$$

(знак неравенства сохраняется, так как основание логарифма больше единицы). Тогда

$$\log_{x-1} 9<\log_{x-1}(x-1)^2, \quad 9<(x-1)^2 \Leftrightarrow 9-(x-1)^2<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-3^2>0 \Rightarrow (x-1-3)(x-1+3)>0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)>0.$$

С учетом ОДЗ (рис.6) $x\in(4;10)$.

Ответ: $x\in(4;10)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 4

1. Вычислить производную функции

$f(x)=\left(\sqrt{3}(x+1)^3+\sqrt{x^3}\right)\ln(3x+1)$ в точке $x=0$.

2. Упростить выражение

$$\left[(a-b)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-1/2}+\left(b^{-1}-a^{-1}\right)ab\right](a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right).$$

3. Решить уравнение $\lg 5^{\frac{(2x-8)x}{5}}=\lg 25$.

4. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 34, а сумма данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке равна 88. Найти эти числа.

5. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+2\sqrt[3]{(x-2)^2}=3$.

6. Решить систему $\begin{cases} x^y=9; \\ (324)^{\frac{1}{y}}=2x^2. \end{cases}$

7. Найти, при каком значении параметра a система $\begin{cases} 2x+(a-1)y=3; \\ (a+1)x+4y=-3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

8. Решить неравенство $\sqrt{1-2x}\ge 1+x$.

9. Решить неравенство $|\sin x+\cos x|<1$.

10. Решить неравенство $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000$.

Вариант 5

1. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x^2-9x-8$, параллельной оси абсцисс.

2. Упростить выражение

$$\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2}-\left(1+x^2\right)^{-1/2}\right)^2+2\left(1-x^4\right)^{-1/2}.$$

3. Решить уравнение $3^{\sqrt{x}+1}-2\cdot 5^{\sqrt{x}-2}=5^{\sqrt{x}}-2\cdot 3^{\sqrt{x}}$.

4. Турист преодолел расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал 1/5 всего пути и еще 60 км, во второй день 1/4 всего пути и еще 20 км и в третий день 23/80 всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

5. Медиана треугольника ABC, проведенная к стороне AB, составляет со стороной CB угол 60° и равна $\dfrac{\sqrt{6}}{10}$ см. Найти длину стороны AB, если она составляет со стороной CB угол 45°.

6. Решить неравенство $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+2}>2$.

7. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}-3\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=2$.

8. Найти наибольшее значение параметра q, при котором уравнение $2\log_2(2x+3)=\log_2(qx)$ имеет единственный корень.

9. Решить уравнение $\sin 2x \sin 6x \cos 4x+\dfrac{1}{4}\cos 12x=0$.

10. Решить неравенство $\log_2\left(9-4^x\right)+2x>3$.

Вариант 6

1. Второй член арифметической прогрессии составляет 88 % от первого члена. Сколько процентов от первого составляет пятый член этой прогрессии?

2. Упростить выражение

$$\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}\right)^{-1}\right](xy)^{-1/2}.$$

3. Решить уравнение $2\cos^2 x-3\sin(\pi-x)=0$.

4. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 см. Вычислить радиус описанной окружности.

5. Жидкость поступает в сосуд через три крана. Заполнение сосуда только через второй кран требует 0,75 времени, за которое сосуд может наполниться через один первый кран. Наполнение сосуда только через третий кран требует времени на 10 мин больше, чем через один второй кран. Если одновременно открыть все три крана, то сосуд заполнится за 6 мин. За какое время наполняет сосуд каждый кран в отдельности?

6. Решить уравнение $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

7. Решить систему $\begin{cases} xy+x+y=-1; \\ x^2y+xy^2=-2. \end{cases}$

8. Решить неравенство $\sqrt{x^2+4x+4}+|5x+3|\le 7$.

9. Найти наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству $x^2+7x+11\le -1\le \dfrac{1}{x}$.

10. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3\log_6^2 x+a}-\log_6 x=0$ имеет решение, и найти это решение.

Вариант 7

1 Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\ln(4x+1)$ в точке с абсциссой $x=0$.

2. Упростить выражение

$$\frac{\left(\sqrt{2}\,z+1\right)^2-\dfrac{4}{\sqrt{2}}z}{\left(\sqrt[4]{z}-1\right)^2\left(z^{\frac{1}{4}}+1\right)^2+2\left(\sqrt[4]{z}-1\right)\left(z^{\frac{2}{8}}+1\right)+1}-\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}}.$$

3. Решить уравнение $9^x+6^x=2^{2x+1}$.

4. Решить уравнение $\cos^3 x-\cos x=\sin 2x$.

5. На уборке снега работают две машины. Первая может убрать всю улицу за 1 ч, вторая – за 0,75 % этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу?

6. Треугольник, высота которого равна $\frac{5}{3}$ см, равновелик ромбу с диагоналями $\frac{7}{2}$ см и 5 см. Найти основание треугольника.

7. Решить систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2; \\ xy = 27. \end{cases}$

8. Найти решения неравенства $x^2 - (a+1)x + a \geq 0$ в зависимости от значения параметра a.

9. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2 - 13}$.

10. Решить неравенство

$$\lg\left(10x^2 - 90\right) - \frac{3}{2}\left(\log_{x^2 - 6x + 9} 10\right)^{-1} \leq 1.$$

Вариант 8

1. Число увеличено на 25 %. На сколько процентов надо уменьшить новое число, чтобы вновь получить исходное число.

2. Упростить выражение

$$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right] a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Решить уравнение $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{2-x} = 11$.

4. Решить уравнение $\sin^2 2x + 8\cos^2 x = 0$.

5. Два печника могут сложить печь за 12 ч. Если первый печник будет работать 2 ч, а второй – 3 ч, то они выполнят 20 % всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?

6. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 6 см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что BD : DC = 2 : 1. Найти длину стороны AC.

7. Решить неравенство $5^{x^3 - 4x - 2} < 0{,}04$.

8. Решить неравенство $\sqrt{x^2-8x+15} \geq x+2$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+4y^2=7; \\ 3x^2+8y^2=14. \end{cases}$$

10. Пусть x_1 и x_2 – различные корни уравнения $3x^2+2x+a-1=0$. Найти все значения параметра a, при которых выполнено неравенство $-1 \leq x_1^2+x_2^2+3x_1x_2 \leq 2$.

Вариант 9

1. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от первого числа отнять единицу, а от третьего отнять 19, то новая тройка чисел составляет арифметическую прогрессию. Найти первоначальные числа.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}\right)^2-\frac{(a^2+2)^2}{a^3}.$$

3. Решить уравнение $\lg(x+1)-\frac{1}{2}\lg(5x-1)=\frac{1}{2}\lg x$.

4. Длина садового участка на 10 м больше его ширины. Его площадь решили увеличить на 400 м2. Для этого его длину увеличили на 10 м, а ширину – на 2 м. Найти площадь нового участка.

5. В равнобедренной трапеции задана диагональ, равная 4 см, и угол между диагональю и основанием, равный $\pi/6$. Найти площадь трапеции.

6. Решить уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

7. Решить систему $\begin{cases} 7^y \log_5 x=-14; \\ 7^y+\log_5 x=5. \end{cases}$

8. Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 2\frac{|x+3|}{x+3}$.

9. Найти значения параметра а такие, чтобы один из корней уравнения $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ был квадратом другого.

10. Решить неравенство $\dfrac{(2x-1)(3-x)}{\log_5|x-1|}>0$.

Вариант 10

1. Найти точки экстремума функции $f(x)=3x^2+\dfrac{6}{x}$.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{a-b}{a^{3/4}+a^{1/2}b^{1/4}}-\frac{a^{1/2}-b^{1/2}}{a^{1/4}+b^{1/4}}\right)\left(a^{1/4}b^{-1/2}-b^{-1/4}\right)^{-1}.$$

3. Решить уравнение $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3=0$.

4. Периметр треугольника равен 4,5 см, а биссектриса делит сторону на отрезки, равные 9 и 6 мм. Найти стороны треугольника.

5. Расстояние от пункта A до пункта B по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причем за каждый час катер отстает от теплохода на 8 км. Путь от пункта B до пункта A против течения реки теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти скорости катера и теплохода в стоячей воде.

6. Решить уравнение $\sin 2x+\sin x=\cos x-\cos 2x$.

7. Решить неравенство $\log_2^2(x-1)^2-4\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-24\geq 0$.

8. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5}=1$.

9. При каких значениях параметра k неравенство $x^2+2kx+|2k+3|>0$ верно для всех значений x?

10. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}+\log_3\left(\log_{0,5}(x-2)+2\right).$$

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТАМ

Вариант 4

1. $f'(0) = 3\sqrt{3}$. **2.** $2b(a-b)$. **3.** $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. **4.** 35 и 53. **5.** $x_1 = 3$, $x_2 = -11/8$. **6.** (3, 2). **7.** $a = -3$. **8.** $x \in (-\infty; 0]$. **9.** $x \in (\pi k + \pi/2; \pi k + \pi)$, $k \in Z$. **10.** $x > 1000$.

Вариант 5

1. $y = -3$, $y = -35$. **2.** $\dfrac{2}{1-x^4}$. **3.** $x = 9$. **4.** 400 км. **5.** 0,6.

6. $x \in (-2; -1/2) \cup (1; +\infty)$. **7.** $x = -11/8$. **8.** $q = 24$. **9.** $x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}$,

$x_2 = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$; $k \in Z$, $n \in Z$. **10.** $x \in (0; 1{,}5)$.

Вариант 6

1. 52 %. **2.** 1. **3.** $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **4.** $R = 2{,}5$ см.

5. 56/3, 14, 24 мин. **6.** $x = 1$. **7.** $\{(-1; -1), (-1; 2), (2; -1)\}$. **8.** $x \in \left(-2, \dfrac{1}{3}\right)$.

9. $x = -3$. **10.** $a \le 0$; $x = 6^{\sqrt{\frac{-a}{2}}}$.

Вариант 7

1. $y = 3x$. **2.** $2z$. **3.** $x = 0$. **4.** $x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **5.** 10 мин. **6.** a=10,5. **7.** $\{(27, 1); (-1, -27)\}$.

8. При $a < 1$ $x \in (-\infty, a] \cup [1, \infty)$;

при $a > 1$ $x \in (-\infty, 1] \cup [a, \infty)$; при $a = 1$ $x \in R$. **9.** $x = 4$.

10. $x \in (-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$.

Вариант 8

1. На 20 %. **2.** 1. **3.** $x_1 = 2$, $x_2 = \log_2 \dfrac{3}{2}$. **4.** $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **5.** 20 ч, 30 ч.

6. $2\sqrt{6}$ см. **7.** $x\,(-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

8. $x \in \left(-\infty, \frac{11}{12}\right]$. **9.** $\left\{\left(0; \pm\sqrt{\frac{7}{4}}\right); \left(\pm 2\sqrt{\frac{7}{10}}; \pm\sqrt{\frac{7}{10}}\right)\right\}$. **10.** $-10/3 \le a < 4/3$.

Вариант 9

1. 5; 15; 45. **2.** 0. **3.** $x = 1$. **4.** 1600 м^2. **5.** $S = 4\sqrt{3}$ см^2.

6. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $k \in Z$, $n \in Z$. **7.** $x = \frac{1}{25}$, $y = 1$. **8.** $x \in [0; 1] \cup [4; 5]$.

9. $-125/8$, $27/8$. **10.** $(0; 1/2) \cup (2; 3)$.

Вариант 10

1. $f_{\min} = f(1) = 9$. **2.** $b/\sqrt{a}$. **3.** $x = 0{,}5$. **4.** 1,2 см; 1,8 см; 1,5 см.

5. 12 км/ч; 20 км/ч. **6.** $x_1 = \frac{2\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $k \in Z$, $n \in Z$. **7.** $x \in (1; 9/8] \cup [5; \infty)$.

8. $x_1 = -7/2$, $x_2 = 2$. **9.** $-1 < k < 3$. **10.** $x \in (2; 3\pi/4]$.

Составители: доцент *А.А. Яковлева*

Научный редактор проф. *А.П.Господариков*