Методические указание по Отраслевой олимпиаде школьников «Газпром», профиль физика (11 класс)

Учебное пособие для подготовки к олимпиаде

Под редакцией Еркович О.С.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии собраны задачи Отраслевой олимпиады школьников «Газпром», проводимой в 2016-2017 учебном году для школьников 11 класса по профилю «Физика».

Приведен пример варианта заочного отборочного этапа, а также все варианты очного заключительного этапа.

Ко всем задачам даны подробные решения.

Задачи, собранные в пособии, позволят новым поколениям абитуриентов почувствовать уровень олимпиады «Газпром», проверить свои силы при подготовке к олимпиадам будущих лет.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ

Вариант отборочного этапа состоит из 20 заданий разной степени сложности, которые в соответствии с уровнем сложности оцениваются различным числом баллов. 5 заданий имеют категорию сложности 1, 10 заданий - категорию сложности 2, 5 заданий – категорию сложности 3.

Максимальное количество баллов, которое может быть набрано участником отборочного тура Олимпиады, равно 40.

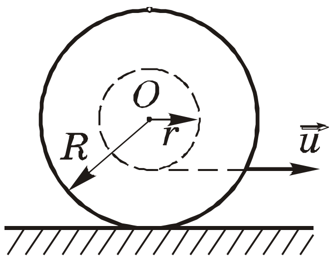
На отборочном этапе участник не должен представлять развернутые решения задач. В зависимости от вида задания, он должен либо указать числовой ответ с рекомендованной в условии точностью, либо указать номер правильного ответа.

ПРИМЕР ВАРИАНТА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ

З А Д А Ч А 1 (1 балл)

Точка движется вдоль оси x по закону $x = 5 + 12t - 3t^2$ м. На каком расстоянии от начала координат скорость точки будет равна нулю? Дать ответ в м, округлив до целых.

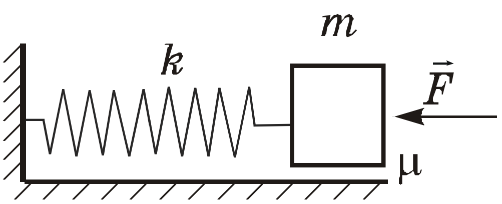
З А Д А Ч А 2 (2 балла)



Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальной поверхности стола и катится по ней без скольжения под действием нити. С какой скоростью (в м/с) будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $u = 0,2$ м/с? Радиус внутренней части катушки r, внешней – $R = 3r$. Ответ округлить до десятых.

З А Д А Ч А 3 (3 балла)

К бруску массой m, расположенному на горизонтальной плоскости, внезапно прикладывают постоянную силу F. Каким будет максимальное сжатие $x_{\max}$ пружины? В начальный момент пружина недеформирована. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ, жесткость пружины k.



а) $x_{\max} = \frac{2}{k}(F + \mu mg)$; б) $x_{\max} = \frac{2}{k}(F - \mu mg)$; в) $x_{\max} = \frac{2}{k}\mu mg$;

г) $x_{\max} = \dfrac{F - \mu mg}{k}$;   д) $x_{\max} = \dfrac{F + \mu mg}{2k}$.

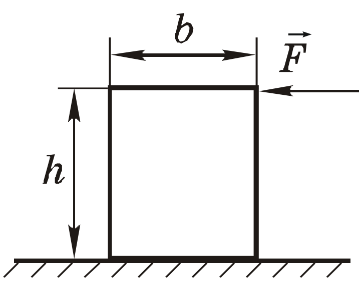
З А Д А Ч А 4 (2 балла)

Автомобиль движется по участку дороги, имеющему форму дуги окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. С какой максимальной скоростью $v_{\max}$ автомобиль может пройти этот участок дороги, если радиус закругления $R = 50$ м, а коэффициент трения между дорогой и колесами автомобиля $\mu = 0{,}8$? Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ дайте в м/с, округлив до целых.

З А Д А Ч А 5 (1 балл)

Два тела, двигаясь навстречу друг другу со скоростями, равными по модулю, $v_1 = v_2 = 4$ м/с, после абсолютно неупругого соударения стали двигаться вместе со скоростью $u = 2$ м/с в направлении движения первого тела. Найдите отношение m_1/m_2 массы первого тела к массе второго. Ответ округлите до целого числа.

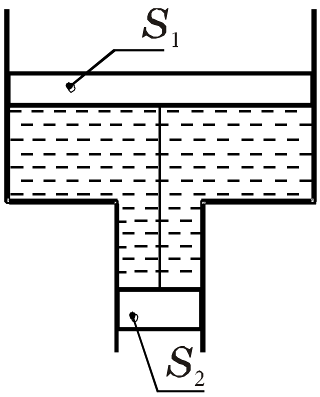
З А Д А Ч А 6 (3 балла)



Какую минимальную горизонтальную силу F нужно приложить к однородному прямоугольному параллелепипеду массой m с основанием в форме квадрата со стороной b и высотой h (см. рис.), чтобы его опрокинуть? Коэффициент трения между параллелепипедом и столом таков, что проскальзывания не происходит.

а) $F = \dfrac{b}{h} mg$; б) $F = \dfrac{b}{2h} mg$;   в) $F = \dfrac{2b}{h} mg$;   г) $F = \dfrac{b+h}{h} mg$;   д) $F = \dfrac{1}{2} mg$ ..

З А Д А Ч А 7 (3 балла)



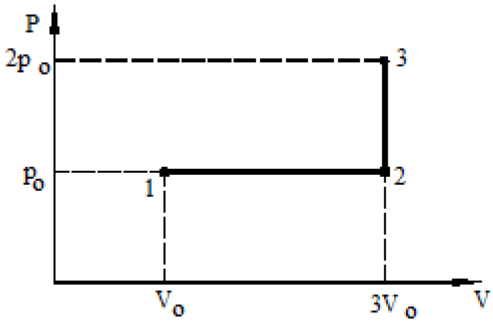
В вертикально расположенном сосуде с сечениями S_1 и S_2 находятся два невесомых поршня (см. рис.). Поршни соединены тонкой нерастяжимой проволокой длиной l. Найдите силу натяжения T проволоки, если пространство между поршнями заполнено жидкостью с плотностью ρ. Концы сосуда открыты в атмосферу.

а) $T=\rho g l\dfrac{S_1S_2}{S_1-S_2}$; б) $T=\rho g l\dfrac{S_1S_2}{S_2-S_1}$; в) $T=\rho g l\dfrac{2S_1S_2}{S_1+S_2}$; г) $T=\rho g l\dfrac{S_1S_2}{S_1+S_2}$; д) $T=\rho g l S_2$.

З А Д А Ч А 8 (3 балла)

Санки, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью $\upsilon = 0,6$ м/с, выезжают на асфальт. Длина полозьев санок L = 2,5 м, коэффициент трения санок об асфальт $\mu = 1$. Найдите путь в метрах, который пройдут санки по асфальту до полной остановки. Силой трения санок о лёд пренебречь. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ (в метрах) округлить до десятых.

З А Д А Ч А 9 (2 балла)



Два моль кислорода, имеющие температуру T_1 = 100 К в состоянии 1, последовательно переводят в состояние 3. Считая кислород идеальным газом, определите среднюю квадратичную скорость его атомов в состоянии 3. Ответ дать в м/с, округлив до целых.

З А Д А Ч А 10 (2 балла)

Четыре маленьких шарика массы m и заряда q каждый, соединенные невесомыми нитями, удерживаются в вершинах квадрата со стороной a. Если нити одновременно перережечь, то шарики начнут двигаться. Определите максимальный импульс каждого шарика в таком движении. Гравитационным взаимодействием шариков пренебречь.

а) $p_{\max}=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{mq^2}{2a}\left(4+\sqrt{2}\right)}$; б) $p_{\max}=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2mq^2}{a}}$; в) $p_{\max}=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{mq^2}{a}\left(4+\sqrt{2}\right)}$.;

г) $p_{\max}=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{mq^2}{2\sqrt{2}a}}$.; д) $p_{\max}=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{mq^2}{2a}}$..

З А Д А Ч А 11 (2 балла)

На какую часть первоначальной длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте h над поверхностью Земли был равен периоду его колебаний на поверхности Земли? Радиус Земли принять равным $R_З$.

а) $\frac{\Delta L}{L}=\left(\frac{R_З}{R_З+h}\right)^2$; **б)** $\frac{\Delta L}{L}=1-\left(\frac{2R_З}{R_З+h}\right)^2$; **в)** $\frac{\Delta L}{L}=1-\left(\frac{R_З}{R_З+h}\right)^2$; **г)** $\frac{\Delta L}{L}=\frac{R_З}{R_З+h}$; д) $\frac{\Delta L}{L}=\frac{h}{R_З+h}$

З А Д А Ч А 12 (2 балла)

Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками d и площадью каждой из обкладок S присоединен к источнику постоянного напряжения U. Параллельно пластинкам конденсатора вводится металлическая пластинка толщиной d_0. Каково изменение энергии конденсатора, если пластинку вставлять в конденсатор, отключенный от источника?

а) $\Delta W=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon d_0}{d^2}U^2$; б) $\Delta W=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon d_0}{d^2}U^2$; в) $\Delta W=-\frac{\varepsilon_0\varepsilon d_0}{d^2}U^2$; г) $\Delta W=\frac{\varepsilon_0\varepsilon d_0}{d^2}U^2$; д) $\Delta W=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\left(1-\varepsilon\right)d_0}{d^2}U^2$.

З А Д А Ч А 13 (2 балла)

В замкнутой цепи сила тока равна I_1 = 5 А при величине внешнего сопротивления R_1 = 5 Ом и I_2 = 8 А при величине внешнего сопротивления R_2 = 2 Ом. Определите ЭДС источника. Ответ округлить до целых.

З А Д А Ч А 14 (1 балл)

На стеклянную пластину, показатель преломления которой равен n, падает луч света. Найдите угол падения луча, если угол между отраженным и преломленным лучами равен 90^0

а) $\alpha = \mathrm{arctg}\, n$; б) $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{n}$; в) $\alpha = \mathrm{arctg}\, n^2$; г) $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{n}$; д) $\alpha = \mathrm{arctg}\, n$.

З А Д А Ч А 15 (1 балл)

Какого наименьшего размера должно быть зеркало, висящее на вертикальной стене, чтобы человек ростом h = 160 см, встав перед ним на расстоянии 2 м, мог увидеть себя в полный рост? Верхний край зеркала расположен на уровне глаз человека.

а) 360 см; б) 320 см; в) 160 см; г)80 см д) 40 см

З А Д А Ч А 16 (2 балла)

Математический маятник, прикрепленный к потолку неподвижного лифта, совершает колебания. Как изменится период колебаний маятника при движении лифта вниз с ускорением, равным g/2?

а) увеличится в 2 раза; б) уменьшится в $\sqrt{2}$ раз; в) не изменится;

г) увеличится в $\sqrt{2}$ раз; д) уменьшится в 2 раза.

З А Д А Ч А 17 (1 балл)

В идеальном колебательном контуре к конденсатору подключили последовательно конденсатор такой же ёмкости. Как изменится период колебаний в контуре ?

а) увеличится в 2 раза ; б) увеличится в $\sqrt{2}$ раз ; в) не изменится ;

г) уменьшится в $\sqrt{2}$ раз; д) уменьшится в 2 раза .

З А Д А Ч А 18 (2 балла)

Как изменится период обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле при увеличении её скорости в n раз? Рассмотрите нерелятивистский случай $(\upsilon << c)$

а) увеличится в n^2 раз ; б) увеличится в n раз; в) не изменится;

г) уменьшится в n раз; д) уменьшится в n^2 раз.

З А Д А Ч А 19 (2 балла)

При освещении катода вакуумного фотоэлемента потоком монохроматического света происходит освобождение фотоэлектронов. Как изменится максимальная энергия вылетевших фотоэлектронов при уменьшении частоты падающего света в 2 раза?

а) уменьшится более чем в 2 раза; б) уменьшится менее чем в 2 раза; в) не изменится; г) увеличится менее чем в 2 раза; д) увеличится более чем в 2 раза.

З А Д А Ч А 20 (3 балла)

В область поперечного однородного магнитного поля с индукцией B и глубиной h по нормали влетает альфа-частица. Найдите скорость v частицы, если после прохождения магнитного поля она отклонится на угол φ от первоначального направления. Заряд q и массу m альфа-частицы считать известными.

а) $v = \dfrac{qBh}{m\cos\varphi}$; б) $v = \dfrac{mBh}{q\sin\varphi}$; в) $v = \dfrac{qBh}{m\sin\varphi}$; г) $v = \dfrac{mBh}{q\cos\varphi}$; д) $v = \dfrac{qBh}{m}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОТБОРОЧНОГО ТУРА

Задача 1. Проекция скорости частицы на ось x может быть найдена дифференцированием координаты по времени: $v_x(t) = 12 - 6t$. Она обращается в нуль в момент времени $t = 2$ с. Подставив это значение в выражение для координаты $x = 5 + 12t - 3t^2$, получим $x = 17$ м.

Задача 2. Если угловая скорость вращения катушки равна ω, то скорость ее оси составляет $v = \omega R$. В системе отсчета, связанной с осью катушки, скорость конца нити равна $v' = \omega r$. Учитывая, что, в соответствии с рисунком, нить наматывается на катушку, скорость ее конца относительно Земли равна $u = v - v' = \omega(R - r) = 2\omega r$. Следовательно, $v = \omega R = 3\omega r = \dfrac{3}{2}u = 0{,}3$ м/с.

Задача 3. Учитывая, что при максимальном сжатии пружины скорость груза становится равной нулю, а ее деформация $x = x_{\max}$, по теореме об изменении полной механической энергии системы получим

$$\Delta E = E - E_0 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = A_F + A_{тр}.$$

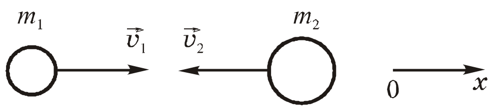
Работа силы F равна $A_F = Fx_{\max}$, работа силы трения $A_{тр} = -\mu mgx_{\max}$. Отсюда

$$\frac{1}{2}kx_{\max}^2 = Fx_{\max} - \mu mgx_{\max}, \text{ и } x_{\max} = \frac{2}{k}(F - \mu mg).$$

Задача 4. При повороте на горизонтальном участке дороги центростремительное ускорение автомобиля создается силой трения: $ma_n = F_{тр}$. Если проскальзывание отсутствует, то $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, а сила трения является силой трения покоя: $F_{тр} \le \mu N = \mu mg$. Следовательно, $\dfrac{mv^2}{R} \le \mu mg$, и $v_{\max} = \sqrt{\mu gR} = 20$ м/с.

Задача 5. В замкнутой системе выполняется закон сохранения импульса:

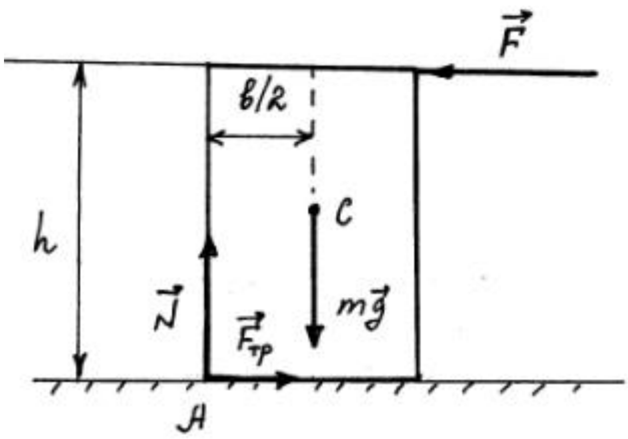
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$



В проекции на ось Ox $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$,

откуда $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{v_2 + u}{v_1 - u} = 3$.

Задача 6. В процессе опрокидывания параллелепипед начинает поворачиваться вокруг перпендикулярного плоскости рисунка ребра A (см. рис.).

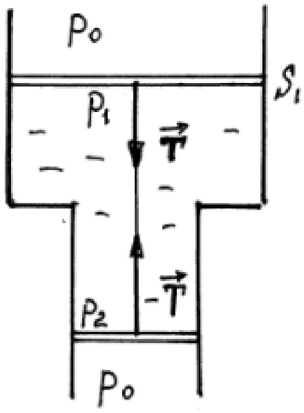


При этом сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила трения покоя $\mathbf{F}_{тр}$ оказываются приложенными к этому ребру. Сила тяжести $m\mathbf{g}$ приложена к центру масс параллелепипеда C. Вращение начинается при условии, что момент силы $\mathbf{F}$ относительно оси A компенсирует момент силы тяжести: $mg\dfrac{b}{2} \le Fh$.

Отсюда $F_{\min} = \dfrac{b}{2h}mg$.

Задача 7. Учитывая, что концы сосуда открыты в атмосферу, а поршни соединены проволокой, натянутой с силой T, запишем условия равновесия поршней:

$$p_0S_1 + T = p_1S_1,$$

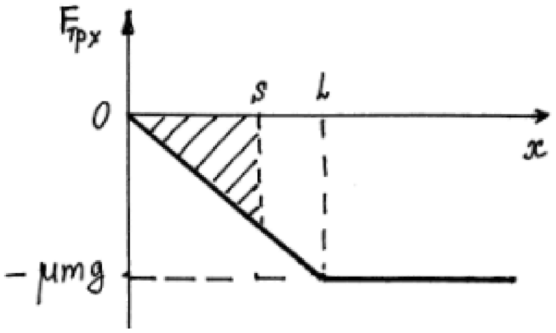


$$p_0S_2 + T = p_2S_2\,.$$

Давления воды непосредственно под верхним поршнем p_1 и непосредственно над нижним поршнем p_2 связаны соотношением $p_2 = p_1 + \rho gl$. Решая полученную систему уравнений относительно T, получим

$$T = \rho gl\,\frac{S_1S_2}{S_1 - S_2}\,.$$

Задача 8. При въезде санок на асфальт сила трения линейно возрастает от 0 до μmg.



Проекция силы трения на направление движения показана на рисунке, где x - расстояние, пройденное санками по асфальту. Очевидно, что

$$F_{mpx} = -\frac{\mu mg}{L}x\,.$$

Предположив, что начальная скорость санок не слишком велика, и они остановятся, пройдя по асфальту расстояние $s < L$, можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии, откуда $\Delta K = A_{mp}$.

Учитывая, что $\Delta K = -\dfrac{1}{2}mv^2$, а $A_{mp} = -\dfrac{\mu mg}{2L}s^2$ (можно – с учетом знака - найти как площадь заштрихованной фигуры на графике), получим

$s = v\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}} = 0{,}3$ м. Условие $s < L$ выполнено.

Задача 9. Средняя квадратичная скорость движения молекул связана с температурой соотношением

$\dfrac{1}{2}m_0v^2 = \dfrac{3}{2}kT$, где $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$ – масса молекулы.

Отсюда $v_3 = \sqrt{3RT_3/\mu}$.

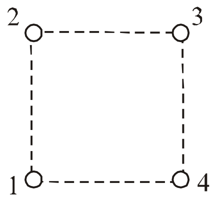
Записав уравнение Менделеева-Клапейрона для состояний 1 и 3, получим

$p_0V_0 = \nu RT_1,\quad 2p_0 \cdot 3V_0 = \nu RT_3$, откуда

$T_3 = 6T_1$ и $v_3 = \sqrt{18RT_1/\mu} = 684$ м/с.

Задача 10. При разлете частиц полная механическая энергия системы остается постоянной, так как диссипативные силы отсутствуют. В начальном состоянии энергия системы представляет собой сумму энергий парных взаимодействий:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34} = k\left(4\frac{q^2}{a} + 2\frac{q^2}{a\sqrt{2}}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(4+\sqrt{2}\right).$$



В конечном состоянии она складывается из кинетических энергий разлетающихся частиц: $W = 4\cdot\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 4\cdot\frac{p_{\max}^2}{2m} = \frac{2p_{\max}^2}{m}$, откуда

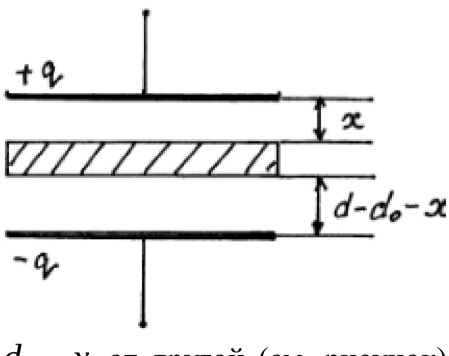
$$p_{\max} = q\sqrt{\frac{m\left(4+\sqrt{2}\right)}{8\pi\varepsilon_0 a}}.$$

Задача 11. Для математического маятника на Земле $T_1 = 2\pi\sqrt{L_1/g_1}$, где g_1 - ускорение свободного падения на поверхности Земли. Для маятника, поднятого на высоту h над земной поверхностью, $T_2 = 2\pi\sqrt{L_2/g_2}$. Учитывая, что $g_1 = G\frac{M}{R^2}$, $g_1 = G\frac{M}{\left(R+h\right)^2}$, где M - масса Земли, R - радиус Земли, и используя $T_1 = T_2$, получим $\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$.

Отсюда следует

$$\frac{L_1 - L_2}{L_1} = 1 - \left(\frac{R_3}{R_3 + h}\right)^2.$$

Задача 12. Заряд конденсатора $q = C_1U = \frac{\varepsilon_0 S}{d}U$ после отключения конденсатора от



батареи остается постоянным (здесь учтено, что диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$). Его энергия (до введения пластинки) $W_1 = \frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2$.

Если металлическая пластинка находится на расстоянии x от одной обкладки и на расстоянии $d - d_0 - x$ от другой (см. рисунок), то получившееся устройство можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора с емкостями $C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{x}$ и $C'' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - d_0 - x}$ соответственно. Емкость этого устройства $C_2 = \left(\dfrac{1}{C'} + \dfrac{1}{C''}\right)^{-1} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}$.

Энергия такого конденсатора $W_2 = \dfrac{q^2}{2C_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}U^2 \cdot \dfrac{d - d_0}{d}$.

Изменение энергии системы $\Delta W = W_2 - W_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon d_0}{d^2}U^2$.

Задача 13. Запишем закон Ома для замкнутой цепи для обоих случаев:

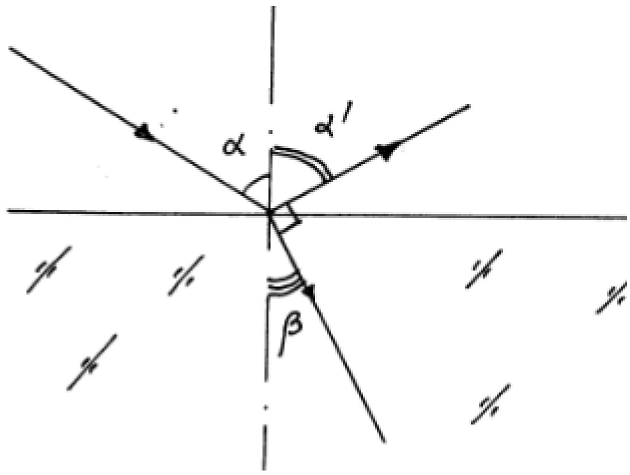
$$E = I_1\left(r + R_1\right)$$

$$E = I_2\left(r + R_2\right).$$

Здесь E - ЭДС источника, r - его внутренне сопротивление. Решив полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим

$$E = \frac{I_1 I_2\left(R_1 - R_2\right)}{I_2 - I_1} = 40 \text{ В.}$$

Задача 14. Угол отражения луча от границы раздела сред α' равен углу падения α. По условию, отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны (см. рис.), следовательно, $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha' = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Из закона преломления света (свет падает из воздуха в стекло) имеем

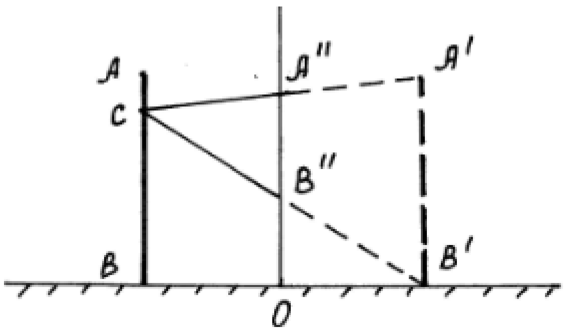


$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha = n$$

.

Следовательно, $\alpha = \mathrm{arctg}\, n$.

Задача 15. Чтобы человек полностью увидел свое изображение в зеркале (отрезок $A'B'$), необходимо, чтобы лучи, «исходящие» из точек A' и B' (см. рис.), попали в глаза наблюдателя (точка C).



Следовательно, минимальная высота висящего на стене вертикального плоского зеркала равна длине отрезка $A''B''$. Учитывая, что треугольники $A''B''C$ и $A'B'C$ подобны, что $BO = OB'$ и что $A'B' = AB = h$, получим $A''B'' = \dfrac{h}{2} = 80$ см.

Задача 16. Для математического маятника в неподвижном лифте $T_1 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, где g - ускорение свободного падения. В движущемся лифте $T_2 = 2\pi\sqrt{\ell/g_{eff}}$, где $g_{eff} = |\mathbf{g} - \mathbf{a}| = \dfrac{g}{2}$ - эффективное ускорение свободного падения. Отсюда $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\dfrac{g}{g_{eff}}} = \sqrt{2}$.

Период колебаний увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

Задача 17. Начальный период колебаний в контуре $T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1}$.

При последовательном соединении конденсаторов их общая емкость $C_2 = \dfrac{C_1}{2}$, откуда

$$T_2 = 2\pi\sqrt{L_2C_2} = 2\pi\sqrt{L\cdot\frac{C_1}{2}} = \frac{T_1}{\sqrt{2}}.$$

Период колебаний уменьшился в $\sqrt{2}$ раз.

Задача 18. Второй закон Ньютона для движения частицы по окружности под действием силы Лоренца имеет вид

$ma_n = qvB$; где $a_n = v^2/R = \omega^2 R$; $v = \omega R$.

Отсюда $m\omega^2 R = q\omega RB$ и $\omega = qB/m$ – угловая скорость частицы.

Период обращения частицы $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi m}{qB}$ не зависит от v.

Задача 19. Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта для обоих случаев:

$$h\nu = A + K_{\max 1},$$

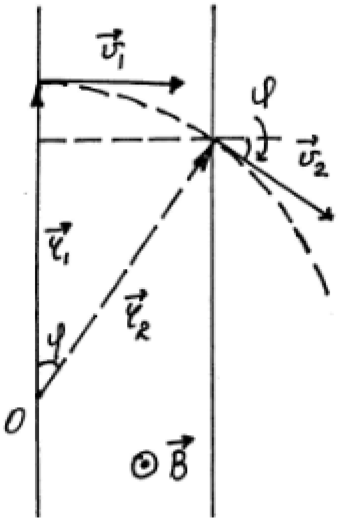
$$h\frac{\nu}{2} = A + K_{\max 2}.$$

Отсюда $K_{\max 2} = \frac{h\nu}{2} - A = \frac{1}{2}(h\nu - A) - \frac{A}{2} = \frac{K_{\max 1}}{2} - \frac{A}{2} < \frac{K_{\max 1}}{2}$.

Максимальная энергия вылетевших фотоэлектронов уменьшится более чем в 2 раза.

Здесь A - работа выхода электронов из металла. Отсюда

Задача 20. При входе в магнитное поле альфа-частица под действием силы Лоренца начинает двигаться по дуге окружности радиуса r:



$$m\frac{v^2}{r} = qvB.$$

При движении по окружности вектор скорости перпендикулярен радиусу-вектору, проведенному из центра траектории O. Следовательно, угол φ поворота вектора скорости равен углу поворота радиуса-вектора, откуда $h = r\sin\varphi$.

Из системы двух уравнений с двумя неизвестными получим $v = \frac{qBh}{m\sin\varphi}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ

Критерии оценивания одной задачи в каждом варианте

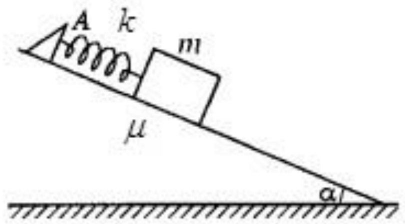
Этап решения	**Баллы**
Записаны уравнения, выполнены чертежи, необходимые для решения задачи	3
Записаны комментарии к уравнениям и чертежам, даны ссылки на физические законы, примененные при решении задачи	2
Проведены математические преобразования, необходимые для решения задачи	1
Проанализирован полученный ответ, проверены единицы физических величин	2
Получен окончательный численный или аналитический ответ	2
Итого	10

Всего в варианте 5 задач. Максимальное число баллов для варианта -50.

Очный тур. Вариант №1

Задача 1.

На наклонной плоскости с углом α находится кубик (см. рисунок). К кубику прикреплена невесомая пружина, другой конец которой закреплен в неподвижной точке A. В исходном состоянии кубик удерживается в положении, при котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость кубика в процессе движения. Масса кубика m, коэффициент жёсткости пружины k, коэффициент трения кубика о наклонную плоскость μ $(\mu < tg\alpha)$.

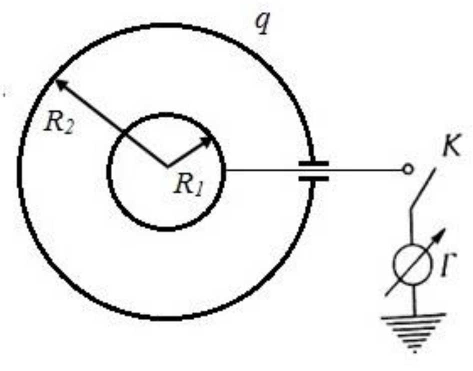


Задача 2.

Тонкая стеклянная пробирка заполнена водой и расположена вертикально, открытым концом в атмосферу. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, а у верхнего открытого конца пробирки его концентрация в 3 раза меньше. Пробирку сверху закрывают крышкой и увеличивают температуру на $\Delta T = 1\,K$. Определите, на сколько изменится давление влажного воздуха внутри пробирки после установления равновесия по сравнению с атмосферным давлением Атмосферное давление $P_0 = 760\,мм\,рт.ст.$, начальная температура $T = 300\,K$, давление насыщенного пара при этой температуре $P_н = 27\,мм\,рт.ст.$ Из эксперимента известно, что малые относительные изменения давления насыщенного пара $\Delta P_н / P_н$ связаны с малыми относительными изменениями его температуры $\Delta T / T$ соотношением $\Delta P_н / P_н = 18 \cdot \Delta T / T$. Изменением уровня жидкости в пробирке во время опыта пренебречь.

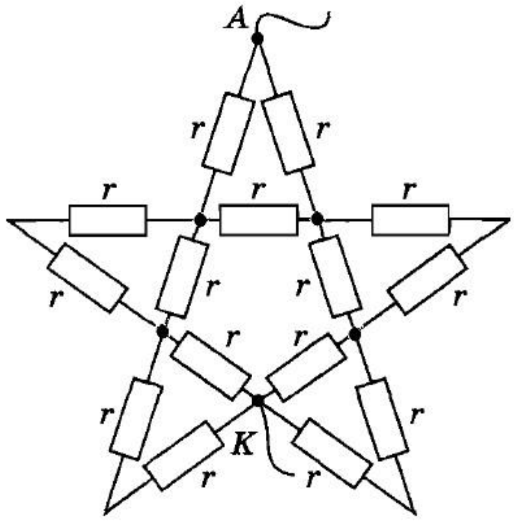
Задача 3.

Две концентрические тонкостенные сферы имеют радиусы $R_1\,и\,R_2$ (см. рисунок). Внешняя сфера имеет заряд q. Внутренняя сфера не заряжена. Определите заряд, который протечет через гальванометр $Г$, если в цепи замкнуть ключ K.



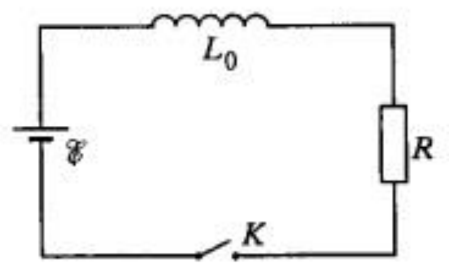
Задача 4.

Определите полное электрическое сопротивление цепи в виде пятиконечной звезды, указанной на рисунке. Все резисторы, включенные в цепь, имеют одинаковое сопротивление равное r. Подводящие провода присоединены к точкам $A\,и\,K$.



<u>*Задача 5.*</u>

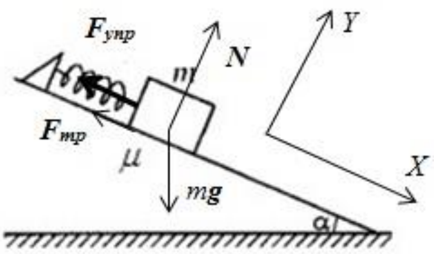
В схеме, изображенной на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ устанавливается стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону $L = L_0(1 + A\sin\omega t)$, где $A < 1$, то ток через резистор R будет также изменяться. Определите амплитуду переменной составляющей силы тока с частотой ω. Рассмотреть случай медленных изменений индуктивности, т.е. когда выполнятся условие $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными величинами считать $\mathcal{E}, L_0, A, R, \omega$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



Вариант 1. Решения

<u>*Задача 1. Решение:*</u>

Выберем систему координат: ось X направим вдоль наклонной плоскости, ось Y перпендикулярно ей (см. рисунок).



В момент времени, когда скорость максимальна – ускорение равно нулю: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$.

Уравнение движения кубика в этот момент времени, по оси X имеет вид:

$-kx + mg\sin\alpha - \mu N = 0$, где $x -$ величина абсолютной деформации пружины. Из уравнения движения в проекции на ось Y находим $N = mg \cdot \cos\alpha$. Отсюда величина абсолютной деформации пружины равна:

$$x = \frac{mg}{k}(tg\alpha - \mu) \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

Запишем для этого момента времени закон сохранения энергии:

$$mgH = mgh + \frac{kx^2}{2} + F_{тр} \cdot x + \frac{mv_{max}^2}{2} \qquad (2)$$

Из геометрических соображений, очевидно, что $H - h = x \cdot \sin\alpha$. Выражаем из уравнения (2) искомую максимальную скорость кубика:

$$v_{max}^2 = 2g(H-h) - \frac{2 \cdot F_{тр}}{m} - \frac{k}{m}x^2 = 2gx\cos\alpha \cdot (tg\alpha - \mu) - \frac{k}{m}x^2.$$

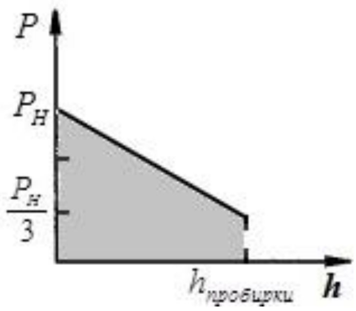
Учитывая выражение (1), получим:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}g(tg\alpha - \mu) \cdot \cos\alpha.$$

__Ответ:__ $v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}g(tg\alpha - \mu) \cdot \cos\alpha.$

__Задача 2. Решение:__

При открытой пробирке общее давление воздуха и пара в любом поперечном сечении пробирки равно атмосферному давлению P_0. Следовательно, парциальное давление воздуха в пробирке так же, как и давление пара, изменятся с высотой по линейному закону и равно $P_0 - P_H$ у поверхности воды и $P_0 - P_H/3$ у открытого конца пробирки (см. рисунок).



Очевидно, что среднее (по высоте) давление сухого воздуха будет равно:

$P_{Bcp} = P_0 - 2P_H/3.$ (1)

Уравнение состояния идеального газа для сухого воздуха в пробирке имеет вид:

$P_{Bcp} \cdot V = \frac{m}{\mu} RT,$ (2)

где $V -$ объем влажного воздуха в пробирке, $\mu -$ молярная масса сухого воздуха.

После того, как пробирку закроют, воздух равномерно распределится по высоте, но его общая масса сохранится, а пар во всем объеме остается насыщенным. После нагревания воздуха в пробирке пар остается насыщенным, а его масса не изменяется, т.к. испарением жидкости пренебрегаем. Обозначим $P'_{Bcp} -$ давление сухого воздуха после нагревания, $P'_H -$ давление насыщенного пара после нагревания. Напишем давление влажного воздуха в закрытой пробирке после нагревания:

$P = P'_{Bcp} + P'_H = \frac{mR}{\mu V}(T + \Delta T) + P_H + \Delta P_H.$ (3)

Используя (1) и (2), а также соотношение между относительными изменениями температуры и давления насыщенного пара преобразуем (3):

$P = \frac{P_{Bcp}}{T}(T + \Delta T) + P_H + 18 \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot P_H = P_0 - \frac{2}{3}P_H + \left(P_0 - \frac{2}{3}P_H\right)\frac{\Delta T}{T} + P_H + 18 \cdot \frac{\Delta T}{T} \cdot P_H =$
$P_0 + + \frac{1}{3}P_H + P_0\frac{\Delta T}{T} + \frac{52}{3}P_H\frac{\Delta T}{T}.$

Отсюда изменение давления влажного воздуха в пробирке равно:

$P - P_0 = \frac{1}{3}P_H + P_0\frac{\Delta T}{T} + \frac{52}{3}P_H\frac{\Delta T}{T}$. Подстановка числовых значений величин в полученную формулу приводит к результату: $P - P_0 \approx 13$ *мм рт. ст.*

Ответ: $P - P_0 \approx 13$ *мм рт. ст.*

Задача 3. Решение:

После замыкания ключа K внутренняя сфера будет заземлена и её потенциал станет равным нулю. Согласно принципу суперпозиции потенциал на внутренней сфере создается зарядом Δq, прошедшим через гальванометр и потенциалом внешней сферы, который во всех точках внутри нее принимает одинаковые значения. Таким образом, можно написать уравнение:

$\varphi'_1 = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0$ (1)

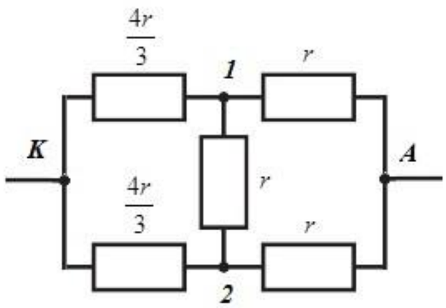
Отсюда выражаем искомый заряд, прошедший через гальванометр:

$\Delta q = -\frac{R_1}{R_2}q.$ (2)

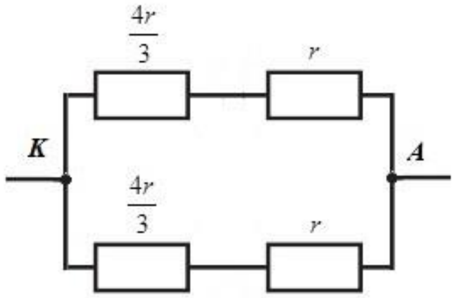
Ответ: $\Delta q = -\frac{R_1}{R_2}q.$

Задача 4. Решение:

Эквивалентная электрическая схема, после предварительных упрощений имеет вид:



В силу симметрии относительно оси AK потенциалы точек 1 и 2 равны: $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, падение напряжения на резисторе, включенном в эту ветвь равно нулю, и ток через него не течет. Поэтому исключение резистора из ветви 1-2 не изменит сопротивления цепи. Тогда схему можно еще упростить:



Сопротивление в верхней ветви цепи (равное сопротивлению в нижней ветви):

$R' = \frac{4r}{3} + r = \frac{7r}{3}$. Полное электрическое сопротивление: $R = \frac{\left(\frac{7r}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{7r}{3}} = \frac{7r}{6}$.

Ответ: $R = \frac{7}{6} r$.

Задача 5. Решение:

Установившейся ток после замыкания ключа: $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Запишем 2-е правило Кирхгофа для контура с переменной индуктивностью:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_i = \mathcal{E} - \frac{d(L \cdot I)}{dt}. \qquad (1)$$

Вычислим производную в правой части уравнения (1).

$$\frac{d(L \cdot I)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L_0(1 + A \sin \omega t) \cdot I\right) = L_0 \frac{dI}{dt} + L_0 \frac{d}{dt}(I \cdot A \sin \omega t). \qquad (2)$$

В случае медленного, по сравнению с τ, изменения индуктивности, ток не успевает значительно измениться и поэтому в указанном приближении можно положить: $\frac{dI}{dt} \approx 0$.

Тогда из (1) с учетом (2) получим:

$$IR = \mathcal{E} - I \cdot L_0 A \omega \cos \omega t. \qquad (3)$$

Выразим из (3) силу тока:

$I = \frac{\mathcal{E}}{R+L_0 A\omega\cos\omega t} = \frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\left(1+\frac{L_0 A\omega}{R}\cos\omega t\right)^{-1}$. (4)

Учтем, что согласно условию $\frac{L_0 A\omega}{R}\cos\omega t \ll 1$ и поэтому можно воспользоваться известной приближенной формулой: $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x,\ |x|<1$.

Тогда получаем из (4):

$I \approx \frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\left(1-\frac{L_0 A\omega}{R}\cos\omega t\right) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}L_0 A\omega}{R^2}\cos\omega t$. (5)

Таким образом, амплитуда переменной составляющей равна:

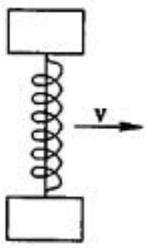
$$I_m \approx \frac{\mathcal{E}L_0 A\omega}{R^2}.$$

Ответ: $I_m \approx \frac{\mathcal{E}L_0 A\omega}{R^2}$.

Очный тур. Вариант №2

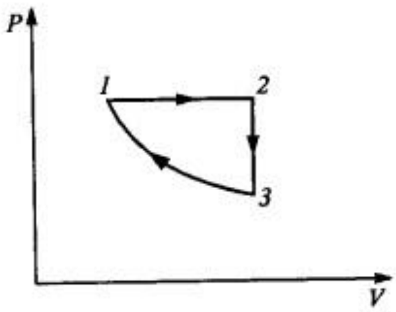
Задача 1.

Два груза массой m каждый связаны нитью (см. рисунок). Между грузами вставлена легкая пружина, сжатая на величину x. Система движется со скоростью **v** вдоль прямой, перпендикулярной ее оси. В некоторый момент времени нить пережигают, и грузы разлетаются под углом 90^0. Определите коэффициент жесткости пружины.



Задача 2.

Один моль одноатомного идеального газа совершает работу величиной A в замкнутом цикле (см. рисунок), состоящем из изобары 1-2, изохоры 2-3 и адиабатического процесса 3-1. Определите количество теплоты Q, подведенное к газу в изобарном процессе, если разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT.



Задача 3.

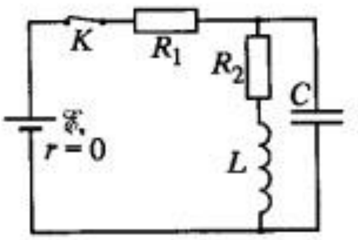
Проводящая пластина заряжается при многократном соприкосновении с заряженным металлическим шаром. Шар после каждого соприкосновения дозаряжается до первоначального значения Q. До какой максимальной величины зарядится пластина, если после первого соприкосновения она приобретает заряд q.

Задача 4.

Двум одинаковым плоским конденсаторам, соединенным параллельно, сообщен заряд q. В момент времени $t = 0$ расстояние между пластинами первого конденсатора начинает равномерно увеличиваться по закону $d_1 = d_0 + vt$, а расстояние между пластинами второго – равномерно уменьшаться по закону $d_2 = d_0 - vt$. Пренебрегая сопротивлением подводящих проводов, определите силу тока в цепи во время движения пластин.

Задача 5.

Определите количество теплоты, которое выделится в цепи (см. рисунок) после размыкания ключа K.



Вариант 2. Решения

Задача 1. Решение:

Согласно законам сохранения энергии и импульса,

$$\frac{2mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}, \qquad (1)$$

$$2m \cdot \mathbf{v} = m\boldsymbol{u}_1 + m\boldsymbol{u}_2. \qquad (2)$$

Возводя уравнение (2) в квадрат, получим:

$$(2v)^2 = u_1^2 + 2\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + u_2^2. \qquad (3)$$

Из определения скалярного произведения находим, что $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = |\boldsymbol{u}_1| \cdot |\boldsymbol{u}_2| \cdot \cos 90^0 = 0$.

Тогда из (1) с учетом (3) получаем:

$$\frac{2mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (2v)^2 = 2mv^2.$$

Отсюда искомый коэффициент жесткости: $k = 2mv^2/x^2$.

Ответ: $k = \frac{2mv^2}{x^2}$.

Задача 2. Решение:

Очевидно, что минимальная температура достигается в состоянии 3, а максимальная температура – в состоянии 2. Таким образом, согласно условию можно написать $\Delta T = T_2 - T_3$.

Из первого закона термодинамики для изобарного процесса 1-2 находим:

$$Q = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + A_{12} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + p_1 \cdot \Delta V_{12} = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Напишем выражение для работы газа во всем цикле:

$$A = p_1 \cdot \Delta V_{12} + A_{31} = R(T_2 - T_1) - A_{13}, \quad (2)$$

где $A_{31} -$ работа, совершаемая над газом в адиабатическом процессе 3-1.

Первый закон термодинамики для процесса 3-1 имеет вид: $\frac{3}{2}R(T_1 - T_3) - A_{13} = 0$, отсюда находим A_{13} и подставляем в (2).

$$A = R(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}R(T_1 - T_3) = R(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}R(T_1 - T_2 + T_2 - T_3) = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Искомое количество теплоты равно: $Q = A + \frac{3}{2}R\Delta T$.

Ответ: $Q = A + \frac{3}{2}R\Delta T$.

Задача 3. Решение:

При некотором очередном соприкосновении заряд пластины $q_1 = C_1\varphi$, а заряд шара $q_2 = C_2\varphi$, где C_1 *и* $C_2 -$ емкости пластины и шара соответственно, $\varphi -$ потенциалы соприкасающихся тел. При первом соприкосновении заряды пластины и шара равны:

$$q_1 = q, \ \ q_2 = Q - q. \quad (1)$$

Отношение зарядов:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2} = const = \frac{q}{Q-q}. \quad (2)$$

Прекращение зарядки пластины означает, что шар при соприкосновении с пластиной уже не разряжается, тогда из (2) получаем уравнение: $\frac{q_{max}}{Q} = \frac{C_1}{C_2} = const = \frac{q}{Q-q}$.

Отсюда: $q_{max} = Q \cdot \frac{q}{Q-q}$.

Ответ: $q_{max} = Q \cdot \frac{q}{Q-q}$.

Задача 4. Решение:

Из определения емкости находим заряд на первом конденсаторе:

$$q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U, \text{ отсюда } q_1(d_0 + vt) = \varepsilon_0 SU. \quad (1)$$

Аналогично для второго конденсатора:

$$q_2(d_0 - vt) = \varepsilon_0 SU. \quad (2)$$

Продифференцируем по времени обе части уравнений (1) и (2).

$$-\frac{dq_1}{dt}(d_0 + vt) + q_1 v = 0,\ \frac{dq_2}{dt}(d_0 - vt) - q_2 v = 0. \quad (3)$$

Знак «минус» в первом уравнении означает, что на первом конденсаторе происходит убыль заряда, за счет уменьшения емкости, в то время как на втором конденсаторе заряд увеличивается. Согласно закону сохранения заряда имеем:

$$I = \left|\frac{dq_1}{dt}\right| = \frac{dq_2}{dt},\ q_1 + q_2 = q. \quad (4)$$

Из (3) с учетом (4) находим искомый ток: $I = \frac{qv}{2d_0}$.

Ответ: $I = \frac{qv}{2d_0}$.

Задача 5. Решение:

Когда ключ замкнут, сила тока текущего в левом контуре определяется по закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

Напряжение на конденсаторе, в установившемся режиме, равно:

$$U_c = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

После размыкания ключа, все выделившееся тепло на резисторе R_2, согласно закону сохранения энергии, будет равно сумме энергий электрического поля конденсатора и магнитного поля тока в катушке:

$$Q = W_C + W_L = \frac{CU_c^2}{2} + \frac{LI^2}{2}. \quad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3) находим искомую теплоту:

$$Q = \frac{(L + C\mathcal{E}^2)R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2}.$$

Ответ: $Q = \frac{(L + C\mathcal{E}^2)R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2}$.

Олимпиада «ГАЗПРОМ», 11-класс

Очный тур. Вариант №3

Задача 1

На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной L = 2 м. На краю доски покоится небольшой брусок. На брусок начинает действовать постоянная горизонтальная сила, так что он движется вдоль доски с ускорением, которое больше ускорения доски. Доска стала двигаться с ускорением $a = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Во время движения бруска по доске выделилось количество теплоты Q = 10 Дж. Определить массу доски.

Задача 2

.На электрической плитке с полезной мощностью N = 1 кВт стоит чайник с кипящей водой. С какой скоростью пар выходит из носика чайника с отверстием S = 1 см^2 при нормальном атмосферном давлении? Считать, что пар их под крышки чайника не выходит. Удельная теплота парообразования воды при 373 К $\lambda = 2,26\frac{МДж}{кг}$. Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Задача 3

Шар наэлектризован так, что поверхностная плотность заряда равна σ. На расстоянии ℓ от поверхности шара потенциал поля равен φ. Определите емкость шара.

Задача 4

Сколько витков никелиновой проволоки надо намотать на фарфоровый цилиндр диаметром D = 1,5 см, чтобы сделать кипятильник, в котором за время t = 10 мин закипает V = 1,2 л воды, взятой при начальной температуре 10 ^{0}С? КПД установки η = 60%, диаметр проволоки d = 0,2 мм, напряжение U = 100 В. Удельное сопротивление никелина $\rho_н$ = $4{,}2\cdot10^{-7}$ Ом·м. Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, удельная теплоемкость воды c = 4200 Дж/(кг·град). Ответ округлить до целых.

Задача 5

Платформа совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с частотой ν = 0,25 с$^{-1}$. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу равен μ = 0,1. Какова может быть максимальная амплитуда x_{max} колебаний платформы, чтобы груз не скользил по ней?

Вариант 3. Решения

Задача 1. Решение

Пусть m – масса бруска, *a* – ускорение доски, *ka* – ускорение бруска (k > 1), F – величина постоянной силы, действующая на брусок, $F_{тр}$ – величина силы трения, M – масса доски

Второй закон Ньютона для бруска и доски в проекцию на ось X запишется

$$F - F_{тр} = mka$$

$$F_{тр} = Ma$$

Если за *t* обозначить время движения бруска от одного края доски до другого, то путь, пройденный бруском, будет равен $L_m = \frac{kat^2}{2}$, а путь, пройденный доской, равен $L_m = \frac{at^2}{2}$. Разность этих путей есть длина доски

$L = L_m - L_M$

Работа силы, приложенной к бруску, равна

$A = F \cdot L_m = (mka - Ma) \cdot L_m$

Запишем закон сохранения энергии для системы «брусок-доска»

$$A = \frac{m}{2}(kat) + \frac{M}{2}(at) + Q = mkaL_m + MaL_M + Q$$

откуда

$Q = Ma(L_m - L_M) = MaL$

и получаем $\qquad M = \frac{Q}{aL} \qquad M = \frac{10}{1 \cdot 2} = 5\,кг$

Задача 2. Решение

Полезная мощность электрической плитки расходуется на перевод некоторой массы воды в единицу времени в пар при температуре кипения, то есть $N = \frac{\Delta m}{\Delta t} L$, где $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ - секундный выход пара.

Из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$p_0 \cdot \Delta V = \frac{\Delta m \cdot RT}{\mu} \qquad \Delta m = \frac{p_0\mu \cdot \Delta V}{RT}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{p_0\mu}{RT} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{N}{L} \qquad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{N}{L} \cdot \frac{RT}{p_0\mu} \quad (1)$$

Объем секундного перехода воды в пар равен $\Delta V = Sv \cdot \Delta t$

Откуда $\frac{\Delta V}{\Delta t} = Sv$ (2)

Приравняем выражения (1) и (2) $\frac{N}{L} \cdot \frac{RT}{p_0\mu} = Sv$

И окончательно

$$v = \frac{N}{LS} \cdot \frac{RT}{p_0\mu} = \frac{10^3}{2{,}26 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} \frac{8{,}31 \cdot 373}{10^5 \cdot 0{,}018} = 7{,}62\left(\frac{м}{с}\right)$$

Задача 3. Решение

Емкость шара $C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot R$

Потенциал шара $\varphi = \frac{kq}{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

По условию задачи потенциал поля заряженного шара в точке, удаленной от его поверхности на расстоянии ℓ равен

$$\varphi = \frac{kq}{R + \ell} \qquad (1)$$

Поверхностная плотность заряда на поверхности шара

$$q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R^2 \qquad (2)$$

(2) в (1)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{R + \ell} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0(R + \ell)} \qquad \varphi\varepsilon_0 R + \varphi\varepsilon_0\ell = \sigma R^2$$

$$R^2 - \frac{\varphi\varepsilon_0 R}{\sigma} - \frac{\varphi\varepsilon_0\ell}{\sigma}$$

$$R_{1,2}=\frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\pm\sqrt{\frac{\varphi^2\varepsilon_0^2}{4\sigma^2}+\frac{\varphi\varepsilon_0\ell}{\sigma}}=\frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\pm\frac{\sqrt{\varphi^2\varepsilon_0^2\left(1+\frac{4\sigma\ell}{\varphi\varepsilon_0}\right)}}{2\sigma}=$$

$$R_{1,2}=\frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\pm\frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\sqrt{1+\frac{4\sigma\ell}{\varphi\varepsilon_0}}=\frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sigma\ell}{\varphi\varepsilon_0}}\right)$$

$$R_{1,2}=\frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sigma\ell}{\varphi\varepsilon_0}}\right)$$

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\cdot\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sigma\ell}{\varphi\varepsilon_0}}\right)=\frac{2\pi\varepsilon_0^2\varphi}{\sigma}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sigma\ell}{\varphi\varepsilon_0}}\right)$$

Задача 4. Решение

Полезная энергия, выделяемая кипятильником, равна

$$W=Q=\eta\frac{U^2}{R}t=\eta\frac{U^2t}{\frac{\rho\ell}{S}}=\eta\frac{SU^2t}{\rho\ell}$$

$S=\dfrac{\pi d^2}{4}$ - площадь поперечного сечения проводника

$\ell=\pi\cdot d\cdot N$ - длина проводника. Тогда

$$Q=\eta\frac{\pi d^2U^2t}{4\rho\pi DN}=\eta\frac{d^2U^2t}{4\rho DN} \qquad (1)$$

$$Q=mc\cdot\Delta T=\rho_в Vc\cdot\Delta T \qquad (2) \qquad\qquad (1) = (2)$$

$\rho_B Vc\cdot\Delta T=\eta\dfrac{d^2U^2t}{4\rho DN}$ Откуда

$$N = \eta \frac{d^2U^2t}{\rho_B Vc \cdot \Delta T \cdot 4\rho D} = \frac{0{,}6 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4 \cdot 600}{10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 4200 \cdot 90 \cdot 4 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}} \approx 13$$

Задача 5. Решение

Обозначим $F_{тр\ п}$ - трение покоя, $F_{тр\ п}^{max}$ - максимальное значение трения покоя.

Максимальное ускорение груз на платформе будет иметь в случае, когда сила трения покоя достигнет своего максимального значения, $F_{тр\ п} = F_{тр\ п}^{max}$

$ma_{max} = F_{тр\ п} = \mu N = \mu mg$, откуда $a_{max} = \mu g = \omega_0^2 \cdot x_{max} = 4\pi^2\nu^2$

$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu$

$$x_{max} = \frac{\mu g}{4\pi^2\nu^2} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{4\pi^2 \cdot 0{,}25^2} = 0{,}4(м)$$

Очный тур. Вариант №4

Задача 1

Спутник Земли массой m = 10 кг вращается по круговой орбите в верхних слоях атмосферы. На сколько изменится скорость спутника за один оборот, если сила сопротивления среды равна $5 \cdot 10^{-4}$ Н? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$, радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g_0 = 9{,}8$ м/с^2. Суточным вращением Земли пренебречь.

Задача 2

Баллон объемом $V = 10$ дм^3, содержащий кислород при температуре $T = 300$ К под давлением $p = 10$ МПа, нагревается. Газ получает количество теплоты $Q = 8{,}35$ кДж. Молярная теплоемкость кислорода при постоянном объеме $C_V = 21$ Дж/(моль·К). Определить температуру и давление газа после нагревания.

Задача 3

Два плоских конденсатора с емкостями $C_1 = 2/3 \cdot 10^3$ пФ и $C_2 = 5/3 \cdot 10^3$ пФ с изолирующим слоем из диэлектрика толщиной d = 2 мм, соединенные последовательно, пробиваются при напряжении U = 5,6 кВ. Определите напряженность поля, при котором происходит пробой диэлектрика.

Задача 4

При напряжении в сети U_1 = 120 В вода в электрическом чайнике закипает через t_1 = 20 мин, при напряжении U_2 = 110 В – через t_2 = 28 мин. Через сколько времени закипит вода, если напряжение в сети упадет до U_3 = 100 В? Потери энергии от чайника в окружающее пространство пропорциональны времени нагревания. Начальная температура и масса воды во всех случаях одинаковы. Ответ (в мин) округлит до целых.

Задача 5

Длина нити одного из математических маятников на $\Delta\ell$ = 15 см больше другого. Один из маятников делает N_1 = 7 колебаний, другой – N_2 = 8. Определить периоды колебаний маятников.

Вариант 4. Решения

Задача 1. Решение

Потенциальная энергия взаимодействия двух тел принимается равной нулю на бесконечности. На конечных расстояниях r от центра Земли потенциальная энергия взаимодействия спутника с Землей равна

$$U = -\frac{GmM}{r}$$

M – масса Земли. Выражение для полной энергии спутника будет

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$$

Центростремительная сила

$$F_{цс} = \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \qquad v^2 = \frac{GM}{r} \qquad (1)$$

Если тело находится на поверхности Земли, то сила тяжести

$$mg_0 = \frac{GmM}{R^2}$$

Откуда $GM = g_0 R^2$

Тогда $$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mg_0 R^2}{r} \qquad (2)$$

Как видео из (2) полная энергия спутника есть функция скорости спутника и радиуса его орбиты. Сделаем полную энергию спутника функцией только скорости. Из (1) выразим радиус орбиты и подставим в (2)

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mg_0R^2v^2}{GM} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mg_0R^2v^2}{g_0R^2} = -\frac{mv^2}{2} \qquad (3)$$

Скорость спутника равна

$$V^2 = \frac{GM}{r} = \frac{g_0R^2}{r} \qquad v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

Так как спутник движется в верхних слоях атмосферы, то можно считать, что радиус орбиты равен радиусу Земли, то есть

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} = \sqrt{g_0R}$$

Работа сил сопротивления уменьшает полную энергию спутника. Поэтому модуль скорости спутника возрастает (из выражения 3)

$$A_C = -F_C \cdot 2\pi R = E(v + \Delta v) - E(v)$$

$$E(v) = -\frac{mv^2}{2}; \quad E(v + \Delta v) = -\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} = -\frac{mv^2}{2} - mv \cdot \Delta v - \frac{m \cdot \Delta v^2}{2}$$

Слагаемым $\frac{m \cdot \Delta v^2}{2}$ ввиду его малости можно пренебречь. Тогда

$$-F_C \cdot 2\pi R = -mv \cdot \Delta v \qquad \Delta v = \frac{F_C \cdot 2\pi R}{mv}$$

И окончательно

$$\Delta v = \frac{F_C \cdot 2\pi R}{m\sqrt{g_0R}} = \frac{F_C \cdot 2\pi}{m}\sqrt{\frac{R}{g_0}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 3{,}14}{10}\sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6}{9{,}8}} = 0{,}25\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Задача 2. Решение

Молярная теплоемкость вещества $C_V = c_V \cdot \mu$, где c_V удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Откуда $c_V = \frac{C_V}{\mu}$

$Q = \Delta U + A$. Для изохорного процесса $A = 0$. Тогда $Q = \Delta U$

$$Q = \Delta U = m \cdot c_V \cdot \Delta T = \frac{mC_V \cdot \Delta T}{\mu} \qquad \Delta T = \frac{Q \cdot \mu}{m \cdot C_V} \quad (1)$$

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \qquad m = \frac{pV\mu}{RT} \quad (2)$$

(2) в (1)

$$\Delta T = \frac{QRT}{C_V pV} = \frac{8350 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{21 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}} = 99{,}1(К)$$

$T_2 = T_1 + \Delta T = 300 + 99{,}1 = 399{,}1$ (К)

Процесс изохорный

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T}$$

$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{p_1 (T + \Delta T)}{T_1} = p_1 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right) = 10^7 \left(1 + \frac{99{,}1}{300}\right) = 13{,}3(\text{МПа})$$

Задача 3. Решение

Вычислим напряжения на каждом из конденсаторов при их последовательном соединении.

$q_1 = q_2 \qquad C_1U_1 = C_2U_2 \qquad U = U_1 + U_2 \qquad U_2 = \frac{C_1U_1}{C_2}$

$$U = U_1 + \frac{C_1U_1}{C_2} = U_1 \frac{C_1 + C_2}{C_2} \qquad U_1 = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2}$$

$$U_2 = \frac{C_1C_2U}{C_2(C_1 + C_2)} = \frac{C_1U}{C_1 + C_2}$$

большее напряжение существует между пластинами конденсатора емкостью С = $2/3 \cdot 10^3$ пФ ($U_1 > U_2$)

Поэтому вначале будет пробит диэлектрик в первом конденсаторе. После этого все напряжение источника будет приложено между пластинами второго конденсатора и диэлектрик пробивается

$$U_1 = E_1 d = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2}$$

И напряженность поля, при которой происходит пробой диэлектрика, равна

$$E_1 = \frac{C_2 U}{d(C_1 + C_2)} = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}6 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^{6} \left(\frac{В}{м}\right)$$

Задача 4. Решение

Обозначим Q – количество теплоты, отданное при нагревании воды

kt – потери энергии в окружающее пространство

$$\begin{cases} \frac{U_1^2}{R} t = Q + kt_1 \\ \frac{U_2^2}{R} t = Q + kt \end{cases} \qquad \begin{cases} kt_1 = \frac{U_1^2}{R} - Q \\ kt_2 = \frac{U_2^2}{R} - Q \end{cases}$$

$$\frac{kt_1}{kt_2} = \frac{\frac{U_1^2}{R} t_1 - Q}{\frac{U_2^2}{R} t_2 - Q} \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{U_1^2 t_1 - RQ}{U_2^2 t_2 - RQ}$$

$$U_2^2 t_1 t_2 - RQt_1 = U_1^2 t_1 t_2 - RQt_2 \qquad RQ(t_2 - t_1) = (U_1^2 - U_2^2) t_1 t_2$$

$$R = \frac{(U_1^2 - U_2^2) t_1 t_2}{Q(t_2 - t_1)}$$

Выразим коэффициент пропорциональности

$$kt_1 = \frac{U_1^2 t_1}{R} - Q \qquad k = \frac{U_1^2}{R} - \frac{Q}{t_1}$$

$$k = \frac{U_1^2 Q(t_2 - t_1)}{(U_1^2 - U_2^2) t_1 t_2} - \frac{Q}{t_1} = \frac{Q}{t_1}\left(\frac{U_1^2 (t_2 - t_1)}{(U_1^2 - U_2^2) t_1} - 1\right)$$

$$k = \frac{Q}{t_1} \frac{U_1^2 (t_2 - t_1) - U_1^2 t_2 + U_2^2 t_1}{(U_1^2 - U_2^2) t_2} = \frac{Q}{t_1} \frac{U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1}{(U_1^2 - U_2^2) t_1}$$

Запишем уравнение энергетического баланса при напряжении U_3

$$\frac{U_3^2}{R} t_3 = Q + kt_3 \qquad Q = \left(\frac{U_3^2}{R} - k \right) t_3$$

$$\frac{U_3^2 - kR}{R} t_3 = Q \qquad t_3 = \frac{QR}{U_3^2 - kR}$$

$$t_3 = \frac{Q \dfrac{\left(U_1^2 - U_2^2\right) t_1 t_2}{Q\left(t_2 - t_1\right)}}{U_3^2 - \dfrac{U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1}{\left(U_1^2 - U_2^2\right) t_2} \cdot \dfrac{\left(U_1^2 - U_2^2\right) t_1 t_2}{Q\left(t_2 - t_1\right)}} = \frac{\left(U_1^2 - U_2^2\right) t_1 t_2}{U_3^2\left(t_2 - t_1\right) - U_2^2 t_2 + U_1^2 t_1}$$

$$t_3 = \frac{\left(120^2 - 110^2\right) 20 \cdot 28}{100^2\left(28 - 20\right) - 110^2 \cdot 28 + 120^2 20} \approx 44(\text{мин})$$

Задача 5. Решение

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \qquad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_1 + \Delta\ell}{g}}$$

$N_1 = \dfrac{\Delta t}{T_1}$ $\qquad N_2 = \dfrac{\Delta t}{T_2}$ - число колебаний каждого маятника за некоторый промежуток времени Δt

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta t \cdot T_2}{\Delta t \cdot T_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{2\pi \cdot \sqrt{\ell_1 + \Delta\ell} \cdot \sqrt{g}}{2\pi \cdot \sqrt{\ell_1} \cdot \sqrt{g}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_1}} = \frac{8}{7} \qquad \frac{\Delta\ell}{\ell_1} = \frac{64}{49} - 1 = \frac{15}{49}$$

$$\ell_1 = \frac{49}{15}\Delta\ell \qquad \ell_2 = \ell_1 + \Delta\ell = \frac{64}{15}\Delta\ell$$

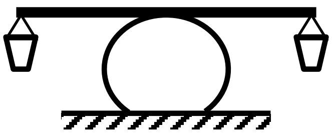
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{49\Delta\ell}{15g}} = 14\pi \sqrt{\frac{\Delta\ell}{15g}} = 14\pi \sqrt{\frac{0{,}15}{15 \cdot 9{,}8}} = 1{,}4(\text{с})$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{64\Delta\ell}{15g}} = 16\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{15g}} = 16\pi\sqrt{\frac{0{,}15}{15\cdot 9{,}8}} = 1{,}6(c)$$

Очный тур. Вариант №5

Задача 1

Поперек неподвижного бревна в горизонтальном положении лежит доска, к концам которой подвешены два одинаковых пустых ведра. Какой наибольший объём воды можно налить в левое ведро, чтобы система всё ещё находилась в равновесии? Плотность воды 1000 кг/м^3, масса пустого ведра 1 кг, масса доски 10 кг, длина доски l = 2,5 м, радиус бревна 0,5 м. Коэффициент трения между доской и бревном 0,1. Толщиной доски и высотой ведер пренебречь.



Задача 2

Идеальному одноатомному газу в количестве 2 моль передали теплоту 8 кДж в процессе, для которого выполняется равенство $p^3V^2 = const$. Объем газа увеличился в 8 раз. Какую работу совершил газ в этом процессе, если его начальная температура была равной 300 К?

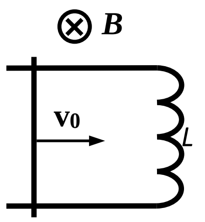
Задача 3

Какую начальную скорость на поверхности Земли надо сообщить телу, чтобы оно начало двигаться по орбите, высота которой равна радиусу Земли? Вращением Земли и сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли 6400 км, ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Задача 4

Высота изображения предмета в тонкой собирающей линзе в 3 раза больше, чем высота самого предмета. Найдите фокусное расстояние линзы, если расстояние между предметом и изображением равно 0,16 м.

Задача 5 Находящиеся в горизонтальной плоскости два параллельных проводника, расстояние между которыми d, замкнуты с одного конца катушкой индуктивности L, а с другого подвижным проводником. Контур полностью находится в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого B не зависит от времени. Подвижному проводнику, масса которого m, сообщают скорость v_0, вектор которой параллелен двум проводникам. Пренебрегая ин-

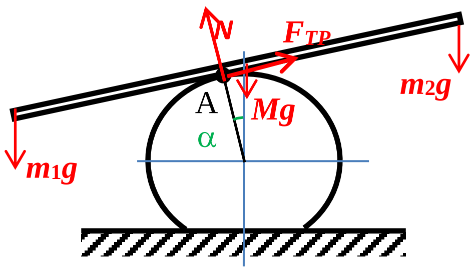


дуктивностью скользящих контактов и сопротивлением проводников, найдите расстояние S, которое пройдет этот проводник до остановки.

Вариант 5. Решения

Задача 1. Решение. Равновесие при $m_1 > m_2$ возможно, если доска не скользит $F_{TP} \le \mu N$ и не вращается

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} - R\alpha\right)\cos\alpha - MgR\alpha\cos\alpha - m_2 g\left(\frac{l}{2} + R\alpha\right)\cos\alpha = 0$$



Т.к. $tg\alpha \le \mu = 0{,}1$, то $tg\alpha \approx \alpha = \mu$, поэтому

$$m_1 = \frac{MR\alpha + m_2\left(\frac{l}{2} + R\alpha\right)}{\frac{l}{2} - R\alpha} = 1{,}5 \text{ кг.}$$

Откуда масса воды равна 0,5 кг, поэтому её объём 0,0005 м^3.

Задача 2. Решение. $p_1^3 V_1^2 = p_2^3 V_2^2$. $p_1 = \frac{\nu R T_1}{V_1}$, $p_2 = \frac{\nu R T_2}{V_2}$, $\frac{T_1^3}{V_1} = \frac{T_2^3}{V_2}$. $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} = 2$.

$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) = 7479$ Дж. $A = Q - \Delta U = 521$ Дж.

Задача 3. Решение. Закон сохранения механической энергии $\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = \frac{mv_c^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_c}$

При движении по орбите $\frac{mv_c^2}{R_c} = G\frac{mM_З}{R_c^2}$, поэтому $\frac{mv_c^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_c} = -G\frac{mM_З}{2R_c}$. Т.к $R_c = 2R_З$, то $\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = -G\frac{mM_З}{4R_З}$. С учётом равенства $GM_З = gR_З^2$

$v_0 = \sqrt{\frac{3}{2}gR_З} \approx 9798$ м/с

Задача 4. Решение. Расстояние от предмета до изображения $L = d + f$. Для тонкой собирающей линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, $\frac{L}{df}=\frac{1}{F}$, $\frac{L}{F}=\frac{df}{F^2}$. Т.к. увеличение $\Gamma=\frac{f}{d}$, то $F\frac{\Gamma+1}{\Gamma}=d$. $\frac{L}{F}=\frac{d^2\Gamma}{F^2}$,

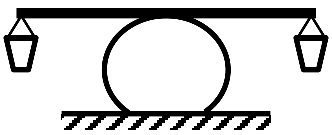
$$\frac{L}{F}=\frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma},\ F=\frac{L\Gamma}{(\Gamma+1)^2}=0{,}03\ \text{м}$$

Задача 5. Решение. Уравнение динамики $ma=-F_A$, Сила Ампера $F_A=IBd$, Закон Ома $\mathcal{E}_i+\mathcal{E}_S=IR=0$, откуда $vBd=L\cdot I'(t)$. Т.к. $a=v'(t)$, то $mv''=-I'Bd$ или $v''=-\frac{B^2d^2}{mL}v$. Это уравнение описывает колебания проекции скорости с амплитудой v_0 и круговой частотой $\omega=\frac{Bd}{\sqrt{mL}}$. Смещение проводника тоже является колебательным движением с амплитудой

$A=\frac{v_0}{\omega}$. Следовательно, $S=\frac{v_0\sqrt{mL}}{Bd}$.

Очный тур. Вариант №6

Задача 1



Поперек неподвижного бревна в горизонтальном положении лежит доска, к концам которой подвешены два одинаковых ведра. Наибольший объём воды, которую можно налить в левое ведро, чтобы система всё ещё находилась в равновесии, равен 0,7 л. Найдите массу доски. Плотность воды 1000 кг/м^3, масса пустого ведра 1 кг, длина доски l = 3 м, радиус бревна 0,6 м. Коэффициент трения между доской и бревном 0,1. Толщиной доски и высотой ведер пренебречь.

Задача 2

Идеальному одноатомному газу в количестве 2 моль передали теплоту 521 Дж в процессе, для которого выполняется равенство $p^2V^3=const$. Объем газа увеличился в 4 раза. Какую работу совершил газ в этом процессе, если его начальная температура была равной 600 К?

Задача 3

Какую начальную скорость на поверхности Земли надо сообщить телу, чтобы оно начало двигаться по орбите, высота которой равна двум радиусам Земли? Вращением

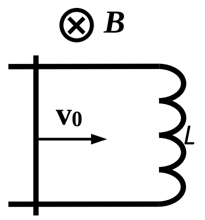
Земли и сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли 6400 км, ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Задача 4

Высота изображения предмета в тонкой собирающей линзе в 2 раза больше, чем высота самого предмета. Найдите расстояние между предметом и изображением, если фокусное расстояние линзы равно 2 см.

Задача 5

Находящиеся в горизонтальной плоскости два параллельных проводника, расстояние



между которыми d, замкнуты с одного конца катушкой индуктивности L, а с другого подвижным проводником. Контур полностью находится в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого B не зависит от времени. Подвижному проводнику, сообщают скорость v_0, вектор которой параллелен двум проводникам.

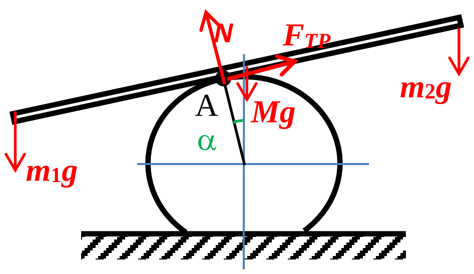
Пренебрегая индуктивностью скользящих контактов и сопротивлением проводников, найдите массу m подвижного проводника, если известно, что этот проводник пройдет до остановки расстояние S.

Вариант 6. Решения

Задача 1. Решение

Равновесие при $m_1 > m_2$ возможно, если доска не скользит $F_{TP} \le \mu N$ и не вращается

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} - R\alpha\right)\cos\alpha - MgR\alpha\cos\alpha - m_2 g\left(\frac{l}{2} + R\alpha\right)\cos\alpha = 0$$



Т.к. $tg\alpha \le \mu = 0{,}1$, то $tg\alpha \approx \alpha = \mu$, поэтому

$$M = \frac{m_1\left(\frac{l}{2} - R\alpha\right) - m_2\left(\frac{l}{2} + R\alpha\right)}{R\alpha} = 14{,}8 \text{ кг.}$$

Задача 2. Решение. $p_1^2 V_1^3 = p_2^2 V_2^3$. $p_1 = \frac{\nu R T_1}{V_1}$, $p_2 = \frac{\nu R T_2}{V_2}$, $T_1^2 V_1 = T_2^2 V_2$. $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_2}} = \frac{1}{2}$.

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) = -7479 \text{ Дж. } A = Q - \Delta U = 8000 \text{ Дж.}$$

Задача 3. Решение.

Закон сохранения механической энергии $\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = \frac{mv_c^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_c}$

При движении по орбите $\frac{mv_c^{\ 2}}{R_c} = G\frac{mM_З}{R_c^{\ 2}}$, поэтому $\frac{mv_c^{\ 2}}{2} - G\frac{mM_З}{R_c} = -G\frac{mM_З}{2R_c}$. Т.к $R_c = 3R_З$, то $\frac{mv_0^{\ 2}}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = -G\frac{mM_З}{6R_З}$. С учётом равенства $GM_З = gR_З^{\ 2}$ $v_0 = \sqrt{\frac{5}{3}gR_З} \approx 10328$ м/с

Задача 4. Решение.

Расстояние от предмета до изображения $L = d + f$. Для тонкой собирающей линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, $\frac{L}{df} = \frac{1}{F}$, $\frac{L}{F} = \frac{df}{F^2}$. Т.к. увеличение $\Gamma = \frac{f}{d}$, то $F\frac{\Gamma+1}{\Gamma} = d$. $\frac{L}{F} = \frac{d^2\Gamma}{F^2}$,

$$\frac{L}{F} = \frac{\left(\Gamma+1\right)^2}{\Gamma}, \; L = F\frac{\left(\Gamma+1\right)^2}{\Gamma} = 0{,}09 \text{ м.}$$

Задача 5. Решение.

Уравнение динамики $ma = -F_A$, Сила Ампера $F_A = IBd$, Закон Ома $\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_S = IR = 0$, откуда $vBd = L \cdot I'(t)$. Т.к. $a = v'(t)$, то $mv'' = -I'Bd$ или $v'' = -\frac{B^2d^2}{mL}v$. Это уравнение описывает колебания проекции скорости с амплитудой v_0 и круговой частотой $\omega = \frac{Bd}{\sqrt{mL}}$. Смещение проводника тоже является колебательным движением с амплитудой

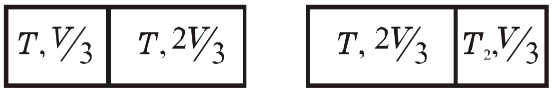
$A = \frac{v_0}{\omega}$. Следовательно, $S = \frac{v_0\sqrt{mL}}{Bd}$, откуда $m = \frac{1}{L}\left(\frac{BdS}{v_0}\right)^2$.

Очный тур. Вариант №7

Задача 1

Коэффициент жесткости резинового жгута, длина которого L и масса m, равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определите радиус вращающегося кольца.

Задача 2.



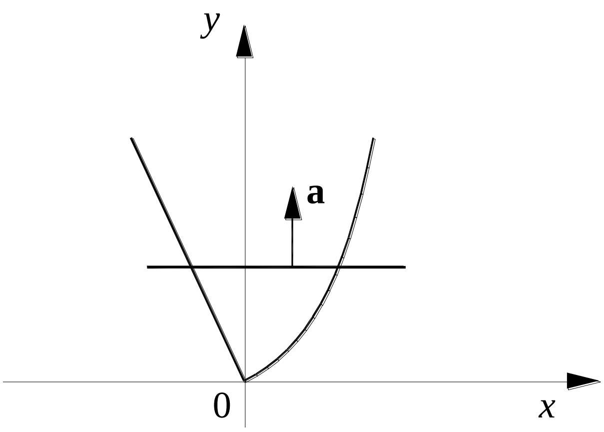
Сосуд разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две части, имеющие объёмы: левая – $V/3$ и правая – $2V/3$ и содержащие газ с температурой T (см. рис.). До какой температуры T_2 нужно охладить газ в правой части сосуда, чтобы соотношение объёмов сменилось на обратное? Температура левой части сосуда поддерживается постоянной.

Задача 3.

Предмет находится на расстоянии L от экрана. При двух положениях тонкой собирающей линзы, помещенной между предметом и экраном, на экране образуется четкое изображение предмета. Определите оптическую силу линзы, если линейное увеличение линзы в одном (первом) положении в m раз больше, чем в другом.

Задача 4.

Проводник, состоящий из прямолинейного участка $y=-bx$ и ветви параболы $y=kx^2$, находится в однородном магнитном поле **B**, перпендикулярном плоскости *xy*. Из точки 0 перемещают поступательно и без начальной скорости перемычку, параллельную оси *Ox* с постоянным ускорением **a**, направленным вдоль оси *Oy*. Найдите выделяющуюся в контуре тепловую мощность как функцию координаты y. Единица длины перемычки имеет сопротивление ρ. Сопротивлением остальных элементов контура можно пренебречь.



Задача 5

Замороженный гусь массой $m_1 = 6$ кг, оказавшись при комнатной температуре, размораживается в течение времени $t_1 = 24$ часов. Оцените время, за которое в тех же температурных условиях может разморозиться мамонт массой $m_2 = 6$ т, обнаруженный при вскрытии пласта вечной мерзлоты. Воспользуйтесь законом теплопроводности: тепловая мощность, которая переносится через поверхность площади S ,, пропорциональна S и величине, которую называют градиентом температуры. Она определяется как производная $T'(x) = \frac{dT}{dx}$, где ось x направлена по нормали к поверхности.

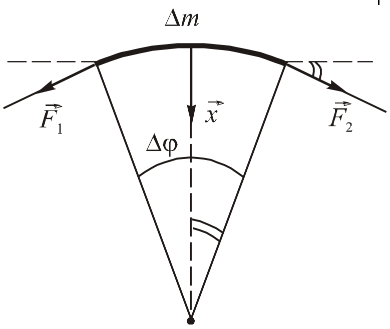
Вариант 7. Решения

Задача 1. Решение

Дано: L, m, k, ω.

Найти: R.

Рассмотрим движение элемента кольца, соответствующего <u>малому</u> центральному углу $\Delta\varphi$. Для него



$$\Delta m = \frac{m}{2\pi}\Delta\varphi,\quad \Delta m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,\ \text{ где } a = a_n = \omega^2 R,$$

силы упругости $\quad F_1 = F_2 = F = k(2\pi R - L)$; (1)

в проекции на ось Ox $\quad \Delta m a_n = 2F\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx F\Delta\varphi$, т.е.

$$\frac{m}{2\pi}\Delta\varphi\cdot\omega^2 R = F\Delta\varphi. \qquad (2)$$

Из (2) $\quad F = \dfrac{m}{2\pi}\omega^2 R \quad$ с учетом (1) получим

$$R = \frac{2\pi k L}{(2\pi)^2 k - m\omega^2}.$$

Ответ: $R = \dfrac{2\pi k L}{(2\pi)^2 k - m\omega^2}$.

Задача 2. Решение

Дано: T, $V_1 = V/3$,

$V_2 = 2V/3$,

$V_1' = 2V/3$,

$V_2' = V/3$.

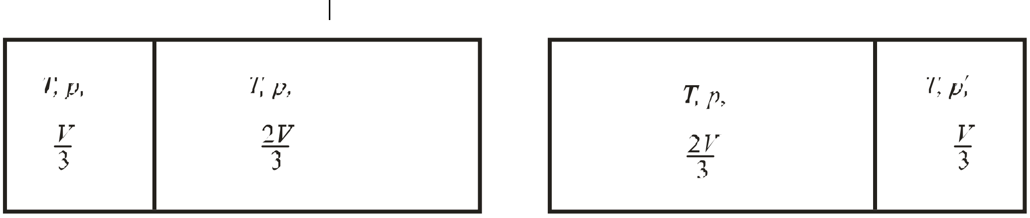
Найти: V_2.

Решение.

Давления с обеих сторон поршня в состоянии равновесия одинаковы. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа слева и справа от поршня в начальном состоянии.

$$p\frac{V}{3} = \nu_1 RT, \qquad (1)$$

$$p\frac{2V}{3} = \nu_2 RT, \qquad (2)$$



И в конечном состоянии: $\quad p'\dfrac{2V}{3} = \nu_1 RT,$ (3)

$$p'\frac{V}{3}=\nu_2RT_2. \qquad (4)$$

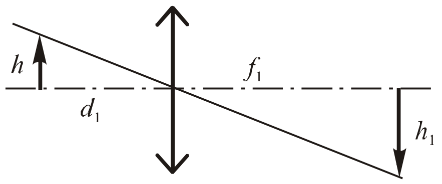
Решая систему (1)–(4) относительно T_2, получим $T_2=\frac{1}{4}T$.

Ответ: $T_2=\frac{1}{4}T$

Задача 3. Решение

Дано: L, $\frac{k_1}{k_2}=m$.
Найти: D.

На экране получается действительное изображение предмета, причем увеличение



$$k_1=\frac{h_1}{h}=\frac{f_1}{d_1};\quad k_2=\frac{h_2}{h}=\frac{f_2}{d_2}. \qquad (1)$$

Расстояние d от линзы до источника и f от линзы до изображения связаны формулой линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \qquad (2)$$

и соотношением $d+f=L$, (3)

где $F=D^{-1}$ – фокусное расстояние линзы.

Решая систему (2)–(3), получим $d_1=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}$, $f_1=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}$,

$$d_2=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL},\quad f_1=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-4FL}. \qquad (4)$$

По условию, $k_1/k_2=m$. Учитывая (1) и (4), получим

$d_1=f_2$, $d_2=f_1$, $m=\left(f_1/d_1\right)^2$, откуда $f_1=d_1\sqrt{m}$.

Используя (3), получим $d_1=\frac{L}{1+\sqrt{m}}$, $f_1=\frac{L\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$;

учитывая (2), имеем $D=\frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^2}{L\sqrt{m}}$.

Ответ: $D=\frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^2}{L\sqrt{m}}$.

Задача 4. Решение.

Дано: $y = -bx$,

$y = kx^2$,

B, a,

$v_0 = 0$,

ρ.

Найти: $p(y)$.

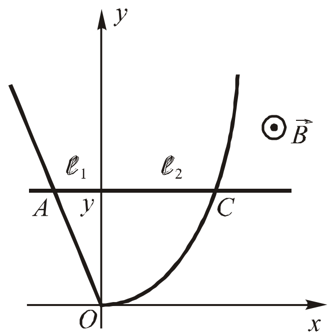
Решение.

При движении перемычки в контуре OAC изменяется магнитный поток и возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\ell v,$$

где S – площадь контура OAC; ℓ – длина перемычки AC;

$\ell = \ell_1 + \ell_2$, где $\ell_1 = y/b$, $\ell_2 = \sqrt{y/k}$.



Скорость перемычки $v = at$; учитывая, что при равноускоренном движении с $v_0 = 0$ $y = \frac{1}{2}at^2$, получим $v = \sqrt{2ay}$ и

$$\mathcal{E}_i = B\left(\frac{y}{b} + \sqrt{y/k}\right)\sqrt{2ay} = B\left(\sqrt{2ay^3/b^2} + y\sqrt{2a/k}\right).$$

В перемычке выделяется тепловая мощность

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R},\text{ где } R = \rho\ell;\text{ отсюда } P = \frac{2aB}{\rho}\left(\frac{y^2}{b} + \sqrt{y^3/k}\right).$$

Ответ: $P = \dfrac{2aB}{\rho}\left(\dfrac{y^2}{b} + \sqrt{y^3/k}\right)$.

Задача 5. Решение

Дано: $m_1 = 6$ кг,

$m_2 = 6$ т,

$t_1 = 24$ ч,

Найти: t_2.

Решение.

В обоих случаях теплота, которую должно получить тело, пропорциональна его массе m: $Q = \alpha m$

Коэффициент пропорциональности α должен быть одним и тем же, поскольку речь идет об объектах одинаковой природы. Удобно ввести характерный размер тела l. Очевидно, что в обоих случаях можно принять $m = \rho l^3$. Плотность ρ в обоих случаях также можно принять одинаковой.

Время, в течение которого тело будет разморожено, можно оценить как

$t = \dfrac{Q}{P}$, где P - тепловая мощность, которая поступает через поверхность тела. В соответствии с законом теплопроводности, $P = \beta S\dfrac{dT}{dx}$, где β - коэффициент пропорциональности. Производную $\frac{dT}{dx}$ можно оценить: $\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{l}$, где ΔT - разность температур между атмосферным воздухом и внутренней частью тела. Учитывая, что $S : \; l^2$, получим

$$t = \frac{\alpha\rho l^3}{\beta S \frac{dT}{dx}} : \; \frac{l^3}{l^2 l^{-1}} = l^1 : \; m^{2/3}.$$

Соответственно, $\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = 100$.

Размораживание мамонта продлится примерно 100 суток (около трех месяцев).

Ответ: $t_2 \approx 100$ суток.

Очный тур. Вариант №8

Задача 1

Коэффициент жесткости резинового жгута, длина которого L и масса m, равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Кольцо разрывается, когда возникающая в нем сила упругости становится равной F_0. Определите предельную угловую скорость вращения кольца, считая, что закон Гука выполняется для него вплоть до момента разрыва.

Задача 2

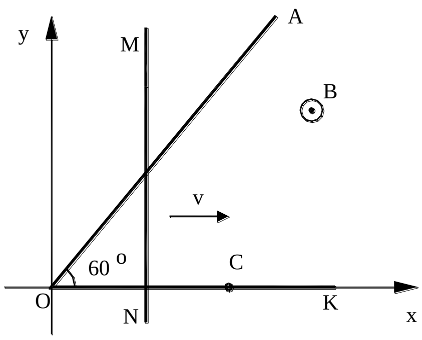
Сосуд разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две части, имеющие объемы: левая – $V/3$ и правая – $2V/3$ и содержащие газ с температурой T. До какой температуры T_2 нужно нагреть газ в левой части сосуда, чтобы соотношение объемов сменилось на обратное? Температура правой части сосуда поддерживается постоянной.

Задача 3

Между предметом высотой h и экраном, положения которых неизменны, помещают тонкую собирающую линзу. Перемещая линзу, находят два ее положения, при которых на экране образуется четкое изображение предмета. Одно из этих изображений (увеличенное) имеет высоту h_1. Какова высота второго изображения?

Задача 4

Проводник AOK, согнутый под углом 60^o, расположен в плоскости xy, как показано на рисунке, в постоянном однородном магнитном поле индукции B, перпендикулярной плоскости xy. По проводнику из начала координат O перемещают поступательно вдоль оси x с постоянной скоростью v перемычку MN, параллельную оси y. Сопротивление единицы длины перемычки равно ρ. Пренебрегая сопротивлением проводника и скользящих контактов, а также индуктивностью контура, найдите полное количество теплоты Q, выделившееся в перемычке за время ее движения до точки C. Длина отрезка OC равна L.



Задача 5

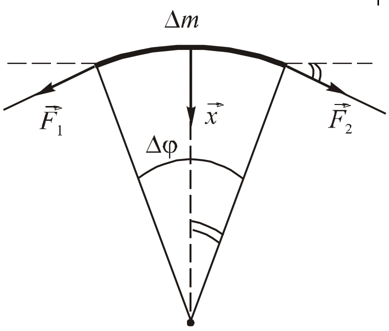
Гусь массой $m_1 = 6$ кг, помещенный в сугроб, замораживается в течение времени $t_1 = 48$ часов. Оцените время, за которое в тех же температурных условиях замерзнет мышонок массой $m_2 = 6$ г. Начальная температура гуся и мышонка – одна и та же. Воспользуйтесь законом теплопроводности: тепловая мощность, которая переносится через поверхность площади S ,, пропорциональна S и величине, которую называют градиентом температуры. Она определяется как производная $T'(x) = \dfrac{dT}{dx}$, где ось x направлена по нормали к поверхности.

Вариант 8. Решения

Задача 1. Решение.

Дано: L , m , k , F_0 .
Найти: ω .

Рассмотрим движение элемента кольца, соответствующего малому центральному углу $\Delta\varphi$. Для него



$$\Delta m = \frac{m}{2\pi}\Delta\varphi, \quad \Delta m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \text{ где } a = a_n = \omega^2 R,$$

силы упругости $\qquad F_1 = F_2 = F_0 = k(2\pi R - L)$; (1)

в проекции на ось Ox $\quad \Delta m a_n = 2F_0 \sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \approx F_0 \Delta\varphi,$

т.е.
$$\frac{m}{2\pi}\Delta\varphi\cdot\omega^2 R = F_0\Delta\varphi. \qquad (2)$$

Из (1) $\quad R = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{F_0}{k} + L\right);$ из (2) $\quad \omega = 2\pi\sqrt{\dfrac{F_0 k}{m(F_0 + kL)}}.$

Ответ: $\omega = 2\pi\sqrt{\dfrac{F_0 k}{m(F_0 + kL)}}.$

Задача 2. Решение

Дано: T, $V_1 = V/3$,

$V_2 = 2V/3$,

$V_1' = 2V/3$,

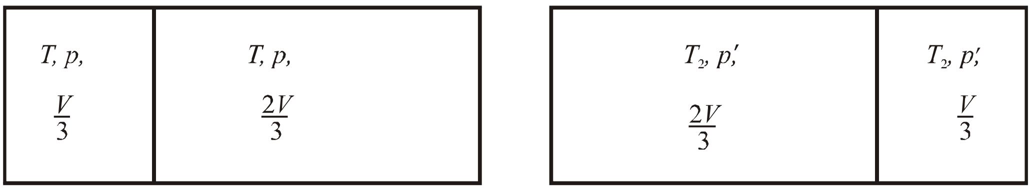
$V_2' = V/3$.

Найти: T_2.

Решение.

Давления с обеих сторон поршня в состоянии равновесия одинаковы.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа слева и справа от поршня в начальном состоянии.



$$p\frac{V}{3} = \nu_1 RT, \qquad (1)$$

$$p\frac{2V}{3} = \nu_2 RT, \qquad (2)$$

И в конечном состоянии:

$$p'\frac{2V}{3} = \nu_1 RT_2, \qquad (3)$$

$$p'\frac{V}{3} = \nu_2 RT. \qquad (4)$$

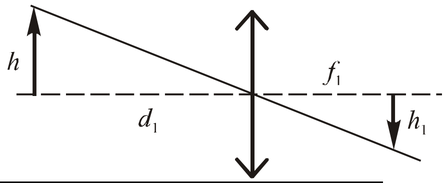
Решая систему (1)–(4) относительно T_2, получим $T_2 = 4T$.

Ответ: $T_2 = 4T$.

Задача 3. Решение

Дано: h, h_1.

На экране получается действительное изображение предмета, причем увеличение



Найти: h_2.

$$\frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}; \quad \frac{h_2}{h} = \frac{f_2}{d_2}. \qquad (1)$$

Расстояние d от линзы до предмета и f – от линзы до изображения связаны формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \qquad (2)$$

и соотношением $d + f = L$, (3)

где F – фокусное расстояние линзы, L – расстояние от источника до экрана.

Решая систему (2)–(3), получим

$$d_1 = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}, \quad f_1 = \frac{L}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL},$$

$$d_2 = \frac{L}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}, \quad f_1 = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4FL}, \text{ т.е. } d_1 = f_2, \ d_2 = f_1.$$

Подставив полученный результат в (1), получим

$$\frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}, \quad \frac{h_2}{h} = \frac{d_1}{f_1} = \frac{h}{h_1}, \text{ откуда } h_2 = h^2/h_1.$$

Ответ: $h_2 = h^2/h_1$.

Задача 4. Решение

Дано: $\alpha = 60°$,

$\vec{B}$, v,

ρ, L.

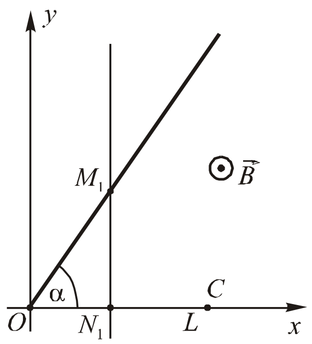
Найти: Q.

Решение.

При изменении магнитного потока Φ_B в контуре M_1ON_1 возникает ЭДС индукции

$$\mathrm{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\frac{dS}{dt} = Byv,$$

где S – площадь контура M_1ON_1; y – длина отрезка M_1N_1.



В контуре течет ток $I = \dfrac{\mathrm{E}_i}{R}$, где $R = \rho y$ – сопротивление отрезка M_1N_1.

В перемычке выделяется тепловая мощность

$$P = I^2R = \frac{\mathrm{E}_i^2}{R} = \frac{B^2v^2}{\rho}y.$$

Учитывая, что $y = x\,\mathrm{tg}\alpha = vt\sqrt{3}$, получим

$$P = P(t) = \frac{B^2v^3\sqrt{3}}{\rho}t.$$

За время движения от точки O до точки C, равное $\tau = L/v$, в перемычке выделится теплота $Q = \int\limits_0^\tau P(t)dt = \dfrac{B^2v^3\sqrt{3}}{\rho}\cdot\dfrac{\tau^2}{2} = \dfrac{B^2L^2v\sqrt{3}}{2\rho}$.

Ответ: $Q = \dfrac{B^2L^2v\sqrt{3}}{2\rho}$.

Задача 5. Решение.

Дано: $m_1 = 6$ кг,

$m_2 = 6$ кг,

$t_1 = 48$ ч,

Найти: t_2.

Решение.

В обоих случаях теплота, которую должно отдать тело, пропорциональна его массе m: $Q = \alpha m$

Коэффициент пропорциональности α должен быть одним и тем же, поскольку речь идет об объектах одинаковой природы. Удобно ввести характерный размер тела l. Очевидно, что в обоих случаях можно принять $m = \rho l^3$. Плотность ρ в обоих случаях также можно принять одинаковой.

Время, в течение которого тело будет заморожено, можно оценить как

$t = \dfrac{Q}{P}$, где P - тепловая мощность, которая излучается через поверхность тела. В соответствии с законом теплопроводности, $P = \beta S \dfrac{dT}{dx}$, где β - коэффициент пропорциональности. Производную $\dfrac{dT}{dx}$ можно оценить: $\dfrac{dT}{dx} \approx \dfrac{\Delta T}{l}$, где ΔT - разность температур между атмосферным воздухом и внутренней частью тела. Учитывая, что $S : \ l^2$, получим

$$t = \frac{\alpha \rho l^3}{\beta S \dfrac{dT}{dx}} : \ \frac{l^3}{l^2 l^{-1}} = l^1 : \ m^{2/3}.$$

Соответственно, $\dfrac{t_2}{t_1} = \left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = \dfrac{1}{100}$.

Мышонок будет заморожен примерно за 1700 с(около 29 минут).

Ответ: $t_2 \approx 1700$ с.